الرياضيات الأساسية

لطلبة الجامعات ومعلمي الصفوف الابتدائية

$1+1=2$

الدكتور
محمد إبراهيم راشد

الدكتورة
شاهيناز عبدالرحمن عيسى



مكتبة المجتمع العربي للنشر والتوزيع

الإعصار للنشر والتوزيع

الرياضيات الأساسية

لطلبة الجامعات ومعلمي الصفوف الابتدائية

الرياضيات الأساسية

لطلبة الجامعات ومعلمي الصفوف الابتدائية

تأليف

الدكتور

محمد إبراهيم راشد

الدكتورة

شاهيناز عبد الرحمن عيسى

الطبعة الأولى

2015م – 1436هـ

دار الأعصار العلمي للنشر والتوزيع

مكتبة المجتمع العربي للنشر والتوزيع

رقم الايداع لدى دائرة المكتبة الوطنية (2013/12/4169)

371.3

راشد ، محمد ابراهيم

الرياضيات الأساسيةلطلبة الجامعات ومعلمي الصفوف الابتدائية/ محمد ابراهيم راشد ، شاهيناز عبد الرحمن عيسى. - عمان : مكتبة المجتمع العربي للنشر والتوزيع ، 2013

(   )ص

ر.أ. : (2013/12/4169)

الواصفات : /الثقافة /

• يتحمل المؤلف كامل المسؤولية القانونية عن محتوى مصنفه ولا يعبر هذا المصنف عن رأي دائرة المكتبة الوطنية او اي جهة حكومية أخرى.

الطبعة العربية الأولى

2015م – 1436هـ

مكتبة المجتمع العربي للنشر والتوزيع

عمان – وسط البلد – ش. السلط – مجمع الفحيص التجاري

تلفاكس 4632739 ص.ب. 8244 عمان 11121 الأردن

عمان – ش. الملكة رانيا العبد الله – مقابل كلية الزراعة – مجمع سمارة التجاري

www. muj-arabi-pub.com

Email: Info@ muj-arabi-pub.com

Email: Moj_pub@yahoo.com

دار الإعصار العلمي للنشر والتوزيع

الأردن - عمان - مرج الحمام - شارع الكنيسة - مقابل كلية القدس

هاتف : 96265713906+ فاكس : 96265713907+

جوال : 00962-797950880

الأردن - عمان - الجامعة الأردنية - شارع الملكة رانيا العبد الله مقابل كلية الزراعة - مجمع سمارة التجاري

هاتف : 96265347917+ فاكس : 96265347918+

info@al-esar.com - www.al-esar.com

ISBN 978-9957-83-380-0 (ردمك)

المحتويات

الموضوع	رقم الصفحة

الفصل الرابع

الأنظمة العددية

الفصل الخامس

الأعداد الكلية : الطبيعية والصفر

الفصل السادس

مفاهيم ونظريات أساسية في نظرية الأعداد

الفصل السابع

الأعداد الصحيحة

الموضوع	رقم الصفحة

الفصل الثامن

الأعداد النسبية

الفصل التاسع

الأعداد الحقيقية

الفصل العاشر

تطبيقات على الأعداد والعمليات عليها

إهداء

إلى طلبة اليوم ، معلمي الغد ، بناة الأجيال .....

إلى معلمي الصفوف الابتدائية في المدارس العربية ....

إلى المختصين والمهتمين في مجتمع عربي متطوّر ومتجدد ....

بسم الله الرحمن الرحيم

المقدمة:

الحمد لله ربّ العالمين، والصلاة والسلام على سيدنا محمد سيد المرسلين، وعلى آله وصحبه أجمعين، ومن تبعه بإحسان إلى يوم الدين، وبعد:

يسرنا وضع هذا الكتاب بين يدي الطلبة الجامعيين والمعلمين الممارسين الذين يدرسون أو يدرّسون الرياضيات الأساسية في الصفوف الابتدائية (1 – 4) ليتعرّفوا المفاهيم الرياضية الأساسية ومهاراتها والتي تشكل قاعدة مشتركة لمختلف فروع المعرفة الرياضية وتطبيقاتها الحياتية.

وقد اشتمل الكتاب على عشرة فصول:

تناول الفصل الأول طبيعة الرياضيات وأهميتها وبنيتها.

وتناول الفصل الثاني المنطق وأساليب البرهان المختلفة بما فيها البرهان المباشر وغير المباشر وغيرها.

أما الفصل الثالث، فقد جاء عنوانه مفاهيم رياضية حديثة تضمنت المجموعات والعمليات عليها، والعلاقات وأنواعها، وكذلك الاقترانات وأنواعها، بالإضافة إلى العمليات الثنائية وخواصها.

وتناول الفصل الرابع الأنظمة العددية متضمنة النظام العددي الثنائي والخماسي والعشري.

أما الفصل الخامس فقد تناول مجموعة الأعداد الكلية؛ والتي تناولت الصفر والأعداد الطبيعية والعمليات عليها، ومن ثم ناقش الفصل السادس مفاهيم ونظريات أساسية في نظرية الأعداد كتطبيق على مجموعة الأعداد الكلية.

وجاءت الفصول السابع والثامن والتاسع لتستكمل المجموعات العددية؛ فتناولت على الترتيب الأعداد الصحيحة والنسبية والحقيقية والعمليات على كل منها.

وفي النهاية جاء الفصل العاشر متضمناً تطبيقات مختلفة على المجموعات العددية والعمليات عليها؛ مثل النسبة والتناسب، والتقدير والتقريب العددي.

وإذ نضع هذا الجهد بين يدي الطلبة والمعلمين والمختصين والمهتمين؛ لنأمل سد فراغ في المكتبة العربية، من حيث ترابط العرض وتكامله أهدافاً ومحتوىً وأسلوباً، فضلاً عن عدد كبير من التمارين والأسئلة المتنوعة التي تسهم في معرفة مدى استيعاب المفاهيم والمهارات الرياضية.

وفي الختام، نتقدم بعظيم شكرنا وتقديرنا إلى كل من ساهم في إخراج هذا الكتاب سواء بإبداء الملاحظات حول بعض أفكاره، أو بتقديم الرأي السديد فيما يتعلق بأسلوب عرضه.

والشكر الخاص للطلبة المعلمين تخصص "معلم الصف" في كليات العلوم التربوية؛ الذين كانوا مصدر إلهام وعون من خلال أسئلتهم ومناقشاتهم أثناء تدريس موضوعاته لسنوات عديدة، قبل أن تجد مكانها بين دفتي هذا المؤلَف.

والله من وراء القصد

المؤلفان

الفصل الأول

الرياضيات

طبيعتها وأهميتها وبنيتها

الرياضيات
طبيعتها و أهميتها و بنيتها

(1.1) مقدمة:

تتسم المعرفة الإنسانية بالوحدة والتكامل على الرغم من تنوعها وتعدد مجالاتها، ومع ذلك يبقى لكل مجال منها طبيعته الخاصة وأساليبه المنهجية، والرياضيات أحد مجالات هذه المعرفة التي تتسم كغيرها من المعارف بطبيعتها الخاصة وبنيتها المحكمة وأساليبها التعليمية التعلمية المتدرجة والتراكمية.

وتعد طبيعة الرياضيات وأهميتها وبنيتها مدخلات رئيسة لمنهاج الرياضيات بمختلف عناصره؛ ولذا كان من الضروري تناول هذه المدخلات الرئيسة في الفصل الأول من هذا الكتاب كما يأتي.

(2.1) طبيعة الرياضيات:

الرياضيات علم متسلسل يسير دائماً إلى الأمام، حاضره مبني على ماضيه، ومستقبله مبني على ذلك كله، إذ إن الحياة الإنسانية لا تسمح ببحث كل شيء من بدئه لما في ذلك من هدر للوقت والجهد والفكر.

والرياضيات علم تجريدي يستخدم الاستدلال في الوصول إلى العلاقات العددية والهندسية، ويتميز هذا العلم بتنظيمه ودقته وتدرج عرضه للمعلومات مما يسهم في الوصول إلى تفسيرات دقيقة للأفكار والنتائج.

إنه علم القياس الكمي والنوعي، إنه العلم المجرد الذي يبحث ضمنياً عن نتائج المفاهيم الأولية العددية والهندسية بأسلوب استنتاجي، كما أنه العلم المعني بدراسة النماذج والأنماط الحسية والفكرية على حد سواء.

وكتعريف للرياضيات يتميز بالدقة والشمولية:

الرياضيات علم تجريدي من خلق وإبداع العقل البشري يهتم بالأفكار والطرائق وأنماط التفكير (*Johnson and Rising,1972,p.3*).

كما أن الرياضيات أسلوب في التفكير يساعد العقل الإنساني في تفسير ما يعترضه من مواقف حياتية أو ما يتكون لدى هذا العقل من رؤىً وأفكار تجريدية.

وعليه فالرياضيات أكثر من كونها حساباً يهتم بإجراء العمليات الحسابية على الأعداد، وأكثر من كونها جبراً يهتم بالرموز والعلاقات، وأكثر من كونها هندسة تهتم بدراسة الأشكال والقياسات، وأكثر من كونها مثلثات تعنى بقياس المسافات، وأكثر من كونها إحصاء يهتم بتفسير البيانات والرسومات، وأكثر من كونها تفاضل وتكامل يهتم بدراسة الظواهر المتغيرة وتقارب الأشياء بل وتباعدها إلى اللانهايات.

إنها طريقة في التفكير، إنها أسلوب في البرهان، إنها الإداة التي تستخدم في حل جميع المشاكل التي تواجه العلوم الأخرى، بل وفي حل مشكلاتنا الحياتية ما دقّ منها أو كبر.

لقد ارتبطت الرياضيات كتعبير بمعان عدّة، فقد رآها البعض بأنها المهارات الحسابية الأساسية، ورآها البعض الآخر بأنها مجرد أداة تستخدم في أمور الحياة اليومية وفي متابعة الدراسات العلمية أو التربوية، في الوقت الذي اعتبرها المختصون بأنها الدراسة المتعمقة للأنظمة المجردة.

وهكذا تصبح الرياضيات أكثر من مجموع فروعها أو موضوعات هذه الفروع كونها طريقة في التفكير تعمل على بلورته وتنمية واستخدامه في أطر من الدقة والمرونة والتجدد، لدرجة أن أحد الرياضيين عرّفها كالآتي:

"Mathematics is the SALT of the earth "(Baniks , 1965,p.1)

والمعنى الحرفي لهذا التعريف هو أن الرياضيات ملح الأرض، ولا يعني ذلك أن الرياضيات لاذعة المذاق، وإنما إشارة إلى الحاجة إليها في الحياة العملية والحياة العلمية كالحاجة الماسة إلى الملح في تحضير معظم الوجبات، فضلاً عن كونه من مكونات مواد هذه الوجبات. وإذا ما تم تجزيء كلمة "SALT" إلى حروفها الأربعة، فإن الرياضيات تصبح علماً وفناً ولغة وأداة، حيث:

S : Science , A :Art , L : Langnage , and T : Tool

- الرياضيات علم يتميز بمعرفة منظمة ذات بنية محكمة لها أصولها وتسلسلها، إذ تبدأ بالمفاهيم غير المعرّفة وتنتهي بتطبيقات للنظريات والقوانين في الحياة اليومية وفي العلوم الأخرى، بل وفي الرياضيات ذاتها.
- والرياضيات فن لما تتميز به من ترتيب وتسلسل في الأفكار وتناسق في البناء، وروعة في التصميم، وإحكام للنماذج الرياضية علمية منها أو توضيحية لمواقف حياتية.
- كما أن الرياضيات لغة تستخدم تعابير ورموز محددة تسهم في التواصل الفكري بين الناس، بل إنها لغة عالمية برموزها وتعابيرها الموحدة تقريباً عند الجميع.
- والرياضيات أداة لكثرة استخدامها في أمور الحياة اليومية ولدورها في دراسة المواد العلمية والإنسانية، إنها أداة مهمة في تنظيم الأفكار وفهم المحيط الذي نعيش فيه، إلا أنها تبقى مستقلة تماماً عن العالم المادي على الرغم من دورها الرئيس في فهمه والتعامل معه؛ وما التركيز على التجريد الرياضي والفصل بينه وبين استخداماته إلا دليل على ذلك، ومصدر قوة لها أدى إلى نموها وتطورها السريع.
- كما أن الرياضيات طريقة تستخدم الطريقة العلمية وغيرها في توليد الأفكار التي تنم عن إبداع الرياضي وقدرته على الحدس والتخيل والتي بمجموعها إنما تنمي المعارف والمهارات الرياضية وتعمل على تسارع التطور في موضوعاتها لتواكب التطور العلمي والتقني المتسارعين، بل وتسبقهما في

كثير من الأمور مما يتيح للعلماء الاستفادة منهما في مختلف مجالات التقدم الإنساني ، ومما يؤكد على ذلك التعريف الآتي:

"Mathematics is away of thinking "(Johnson and Rising, 1972,p.3).

وأخيراً وليس آخراً فقد وصفت الرياضيات بأنها "ملكة العلوم وخادمتها" (عبيد، 2004).

(3.1) اهمية الرياضيات :

تستمد الرياضيات أهميتها من كونها منهجاً فطرياً للعقل الإنساني يعمل على تحرّي الواقع وتحليله ووضعه في نماذج وقياسات تصل بنا إلى نتائج محددة، كما يُلجأ للرياضيات عند توخي الدقة، إذ يحاول الإنسان جاهداً ضبط المعرفة بالقياس الرياضي، وحتى العلوم الإنسانية كعلم النفس وعلم الاجتماع والاقتصاد والحقوق وغيرها تستعين بالرياضيات لصياغة جانبها الموضوعي المبني على دقة القياس والتحليل للمعطيات وصولاً للنتائج والاستنتاجات.

والمنهج الرياضي منهج فطري مرغوب فيه لأنه يعمل على تجنب أساليب المحاولة والخطأ مما يوفر الكثير من الوقت والجهد، لهذا اعتبرت الرياضيات مادة دراسية أساسية في الماضي والحاضر، ولا يُتوقع تجاهل ذلك في المستقبل.

وتتأكد اهمية الرياضيات من خلال أدوارها المتعددة والتي تتمثل بالآتي:

1. الحاجة إلى الرياضيات في أمور الحياة اليومية :

الفرد جزء من المجتمع الذي يتواجد فيه، ولا بد لهذا الفرد من التفاعل مع الأفراد الآخرين؛ ويتطلب ذلك منه إدراك المجتمع و إمكاناته وظروفه؛ ويتم ذلك من خلال إدراك دلالة الأرقام التي تحيط به من كل جانب، في الصحف والمجلات والنشرات ومراكز البحث بل وأحاديث الناس، تلك الأرقام التي تدل على إمكانات

المجتمع وظروفه، وما هذه الأرقام وما يرتبط بها من أساليب التعامل الاجتماعي كالبيع والشراء، والأخذ والعطاء، والإنتاج والاستهلاك؛ إلا نتاج واقع مبني على معارف ومهارات رياضية أساسية.

والمواطن الصالح هو المواطن الذي يعرف كيف يتعامل مع الآخرين بيسر وسهولة، ويتم ذلك من خلال إتقان العمليات الرياضية وتنظيم أساليب التفكير الحياتية مع السرعة والدقة والإتقان في أداء كل ما يخدم الفرد والمجتمع.

2. الحاجة إلى الرياضيات في الدراسات المتخصصة:

إن إجراء كثير من الدراسات العلمية والإنسانية إنما يستوجب معرفة ومهارة رياضيتين تعملان على تسهيل مهمة تلك الدراسات وتطويرها، إذ تبرز أهمية الرياضيات في دراسة الفيزياء مثلاً لما تحتاجه من مهارات حسابية بسيطة ومتقدمة ونماذج هندسية أساسية ومتطورة وموضوعات رياضية وصفية وتحليلية، وتبرز أهميتها في الدراسات الاجتماعية لما تقدمه من موضوعات تسهم في دقة نتائج هذه الدراسات واستنتاجاتها كالإحصاء والاحتمالات وغيرهما.

3. الحاجة إلى تنمية القيم الاجتماعية والاهتمامات الذوقية :

تسهم الرياضيات في تنمية شخصية الفرد وتعمل على تطويرها من خلال تنمية عادات الترتيب والتنظيم، والدقة والموضوعية، والجلد والصبر، والبحث والممارسة، والجرأة والثقة بالنفس، والجد والابتكار وما إلى ذلك من الاتجاهات والقيم والاهتمامات الايجابية البناءة.

4. تنمية أساليب التفكير:

تأتي المرونة الفكرية من خلال ممارسة أساليب التفكير كأسلوب الاستدلال الاستقرائي الذي يبدأ بالجزئيات وينتهي بالكليات أو حل المسائل والمشكلات،

والاستدلال الاستنتاجي الذي يبدأ بالكليات من نظريات وقوانين ثم ينتقل إلى استخداماتها الحياتية والعملية من خلال مواقف تطبيقية مباشرة أو غير مباشرة لتلك الكليات، وإذا ما أدركنا تنوع هذين الأسلوبين وتدرجهما في الوصول إلى الحقائق الرياضية اتضح لنا اتساع أساليب الوصول إلى الحقائق الرياضية والعلمية على حد سواء، مع الثقة في صحة ما تم التوصل إليه، من حيث المبدأ على الأقل، ومن حيث المطلق الرياضي على الأكثر والأشمل والأعم.

5. الحفاظ على التراث الحضاري وتطويره:

تسهم الرياضيات في التطور الحضاري من ناحية، وتتأثر بهذا التطور من ناحية أخرى؛ ويحتاج التطور الحضاري إلى المزيد والمزيد من الموضوعات الرياضية الواقعية والإبداعية.

وإذ يرتكز التطور الحضاري على جهود العلماء والمفكرين السابقين ومنهم الرياضين ليجعلنا نذكر ونفخر بالصفحات المشرقة من تاريخ العرب والمسلمين لما قدموه من إسهامات كثيرة في مختلف المجالات العلمية بدأت بالمحافظة على ما توصلت إليه الأمم السابقة، مع الأمانة في التوثيق والدقة في العمل، وما تم من إنجازات وإبداعات كثيرة أضافوها، فالعالم مدين اليوم بالفضل في نظامه العددي لعلماء المسلمين الذين نقلوا هذا النظام عن الهنود وطوّروه، ومدين للعالم الشهير محمد بن موسى الخوارزمي في موضوع الجبر لما قدّمه من فكر وإبداع في هذا المجال، ومساهمات كثيرة أخرى لا تحصى، وتحوي كتب التاريخ الكثير مما وصل منهما.

ولا يعني ذلك الاكتفاء بما سلف، فالمعرفة الرياضية متنامية ويتسارع هائل، وتدريس الرياضيات لا يعني تلبية المتطلبات الحياتية المباشرة وحسب، بل يتعدّى ذلك إلى إعداد المختصين والباحثين الرياضيين أيضاً، ليسهموا في تقدم هذا المجال المعرفي بمختلف موضوعاته وأبعادها، ولينعكس ذلك بدوره على تطور المجتمع الإنساني ورقيّه.

وقد نتساءل لماذا يحتاج كل فرد إلى دراسة الرياضيات، ولماذا ينبغي تدريس هذا الموضوع لكل فرد؟

إن الإجابة على ذلك تتمثل في أهمية دراسة اي موضوع تعليمي لتحقيق الآتي :

- اكتساب المعلومات والمهارات.
- تنمية الاتجاهات العلمية وإرادة البحث العلمي المجرد والتطبيقي.
- تنمية الاتجاهات والقيم الاجتماعية الحميدة.

ولما كانت الرياضيات هي أحد هذه الموضوعات ، فإنه ينتظر من دراستها المساعدة على تكوين الشخصية الإنسانية المتكاملة والمتوازنة.

وحيث أن للمعلم الدور الرئيس في إقناع طلبته لدراسة هذا الموضوع وتلمس أهميته في تكوينهم الشخصي والاجتماعي، فإن اقتناعه بدراستها إنما يأتي في المقام الأول.

وفضلاً عن الأدوار السابق ذكرها ، فإنه يمكن إضافة ما يأتي:

- تنمية القدرة على التركيز الذهني والعمل على ديمومته.
- تنمية القدرة على التخطيط الحياتي الاقتصادي المتمثل في إدارة الوقت والمال ، بل وفي إدارة الفكر والقول.
- تنمية القدرة على التعبير عن الذات بوضوح ودقة وموضوعية.
- تنمية الثقة بالنفس والاعتماد على الذات واستخدامهما في التعلم الذاتي مدى الحياة.

لقد أدركت المجتمعات الإنسانية أهمية الرياضيات في التعرّف إلى طبيعة المعرفة وحدودها غير المحدودة، مما دفع البعض إلى إطلاق مسمّى "ملكة العلوم" على الرياضيات، ومما دعى إلى وصفها بمرآة الحضارة.

Mathematics is "the mirror of civilization" (sidhu, 1985, p.19)

ولقد توصل الكثير من الباحثين في المجالات العلمية والإنسانية إلى أهمية الدور الذي يمكن أن تسهم به الرياضيات في ميادين علومهم؛ مما دفعهم إلى ترييض هذه العلوم للانتفاع بالمعرفة الرياضية ومزاياها.

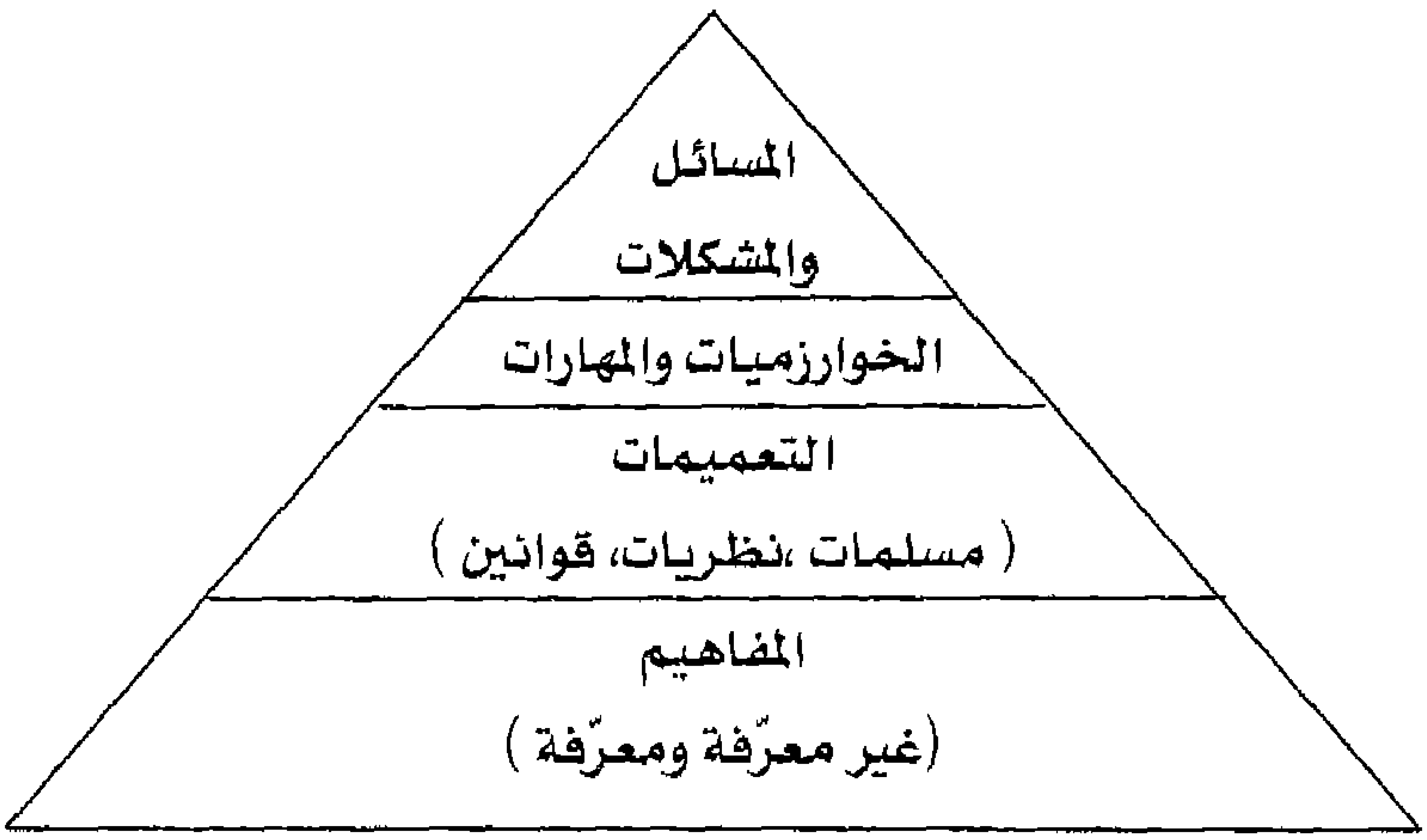
وأخيراً، إذا ما أخذنا في الاعتبار أن التقدم الحضاري يواكب التقدم العلمي ويعتمد عليه، وأن التقدم العلمي يعتمد بدوره على الرياضيات اعتمادا مباشراً؛ أمكننا إدراك الأثر الفعال والمباشر الذي قامت وما زالت تقوم به الرياضيات كأداة مباشرة مهدت الطريق لتطور الفكر البشري والنتائج العملية والعلمية لذلك في شتى المجالات.

ولربط الرياضيات بالمنهاج الدراسي والمعلم والمتعلم يحسن الإشارة إلى نماذج من التطبيقات الرياضية كالآتي:

- استخدام العمليات الحسابية في المواقف الحياتية اليومية.
- تقدير نواتج العمليات الحسابية دون إجرائها لإعطاء تقديرات عملية.
- تعرّف الأشكال والنماذج الهندسية وربطها بالاستخدامات الحياتية.
- قياس الأطوال والمساحات والحجوم والأوزان وغيرها لأهميتها في الحياة اليومية.
- تعرّف المعادلات والمتباينات الجبرية لتحديد العلاقة بين المتغيرات والربط فيما بينها.
- تفسير البيانات من خلال الرسوم التوضيحية والأشكال البيانية.
- مقارنة متغيرين أو أكثر لإدراك العلاقة بين هذه المتغيرات والتنبؤ بالأحداث المستقبلية.
- جمع المعلومات اللازمة للتحقق من صحة أو عدم صحة فكرة ما.
- تخطيط الحياة الاقتصادية من خلال تقدير التكاليف الفعلية للأشياء وتحديد أوجه الصرف اللازمة.

(4.1) بنية الرياضيات :

لكل علم بنيته الخاصة والتي تتفق إلى حد كبير مع بنية أي علم آخر، والرياضيات كأحد هذه العلوم لها بنيتها التي تبدأ بالمفاهيم وتنتهي بالمسائل والمشكلات، وفيما يلي رسم توضيحي متدرج وتراكمي لهذه البنية:



الشكل (1.1) بنية الرياضيات

وكتوضيح مبسط لهذه البنية نذكر الآتي :

1. المفاهيم:

وهي المسمّيات غير المعرّفة والمعرّفة، أما المسمّيات غير المعرّفة فهي ضرورية إذ لا يمكن تعريف كل شيء، وإذا ما تم ذلك فإننا سنواجه مشكلة التعريف الدائري، فمثلاً إذا تم تعريف النقطة بتقاطع مستقيمين وتعريف الخط المستقيم على أساس مجموعة من النقاط على استقامة واحدة، عندها نكون قد عرّفنا المستقيم بدلالة النقاط والنقاط بدلالة المستقيمات، وهذا غير مناسب رياضياً، كما أنه من غير المناسب أن نعرّف النقطة بأنها ذلك الشيء غير الموجود؛ أما تعريفها بأنها ما يتركه القلم من أثر على الورقة أو ما تتركه الطبشورة من أثر على السبورة غير مناسب أيضاً،لأنه عند وضع عدسة فوق هذا الأثر وتركيز النظر على ذلك فلسوف

تجده مجسماً، وعليه باتت الحاجة ماسة إلى مفاهيم غير معرّفة مثل: النقطة، الخط المستقيم، المستوى وغيرها.

أما المفاهيم المعرّفة ، فهي تلك المفاهيم التي تعرّف على أساس المفاهيم غير المعرّفة، فالقطعة المستقيمة مثلاً مفهوم معرّف على أساس أنها مجموعة جزئية من خط مستقيم، والمثلث مفهوم معرّف على أساس إتحاد ثلاث قطع مستقيمة تتلاقى مثنى في نقطة، والعدد الزوجي مفهوم معرّف على أساس أنه العدد الذي يقبل القسمة على العدد (2) دون باقٍ، والصحيح أن هناك باقٍ هو الصفر، ولهذا نكتفي بالقول على أن العدد الزوجي هو العدد الذي يقبل القسمة على العدد (2).

2. التعميمات:

بالنظر إلى نموذج البنية الرياضية نجد أن التعميمات تتلو المفاهيم بنوعيها، كما أن هذه التعميمات متنوعة، إذ نجد المسلمات والنظريات والقوانين.

أما المسلمات فهي التعميمات التي يُسلّم بصحتها دون الحاجة إلى برهان، مثل:

- الكل أكبر من الجزء.
- إذا جمعنا أشياء متساوية لأخرى متساوية كانت النواتج متساوية.
- يمكن رسم مستقيم واحد فقط يمر بنقطتين مختلفتين.

وهكذا نجد مسلمات كثيرة للأعداد والهندسة والرياضيات الحديثة، وتقبل دون برهان، إذ من غير الممكن برهنة كل تعميم، لأنه إذا ما تم ذلك فلسوف نبرهن تعميم بدلالة الآخر وبالعكس أيضاً بصورة مباشرة أو غير مباشرة وعندها نقع في مشكلة البرهان الدائري والتي تشبه في نهجها إلى حد بعيد أسلوب التعريف الدائري.

والنظريات هي تلك الحقائق الرياضية التي تتم برهنتها بناء على المسلمات والمفاهيم السابقة، ومن النظريات ما يلي كأمثلة:

- مجموع أي عددين فرديين هو عدد زوجي.
- مجموع قياسات زوايا المثلث يساوي $180°$.

أما القوانين فهي نظريات مشهورة وكثيرة الاستخدام سواء في الرياضيات نفسها أو في العلوم الأخرى أو في الحياة اليومية، ومن أمثلة ذلك:

$$\text{مساحة المنطقة المثلثة} = \frac{\text{طول القاعدة} \times \text{الارتفاع}}{2}$$

$$\text{مساحة المنطقة المستطيلة} = \text{الطول} \times \text{العرض}$$

3. الخوارزميات والمهارات:

يُقصد بالخوارزمية الطريقة التي تتصف بخطوات محددة وتؤدي إلى نتيجة رياضية معينة، وهناك كثير من الخوارزميات في الرياضيات مثل:

- خوارزميات الجمع.
- خوارزميات الطرح.

أما المهارة فهي أداء عمل ما، ومن ذلك أداء خوارزمية ما بسرعة ودقة وإتقان، فأداء أي خوارزمية بسرعة ودقة وإتقان مهارة، وحل مسألة رياضية مهارة، وإقامة عمود على قطعة مستقيمة مهارة، وقياس زاوية باستخدام المنقلة مهارة، وهكذا....

4. المسائل والمشكلات:

تعتبر المسائل والمشكلات مواقف علمية وعملية تستخدم الرياضيات في حلها، وتتعدد المسائل والمشكلات وتتنوع في الرياضيات والعلوم والمعارف الأخرى.

والمسألة موقف جديد يحتاج إلى حل ولا يكون له حل جاهز لدى الفرد، وعليه ما هو مسألة أو مشكلة تواجه طالباً ما قد لا تكون مسألة أو مشكلة تواجه طالباً ما قد لا تكون مسألة أو مشكلة تواجه طالباً آخر في الصف نفسه أو في صف لاحق.

ومن الأمثلة على المسائل والمشكلات الآتي :

- تدرس إلهام 3 ساعات يومياً ، فكم ساعة تدرس في أربعة أيام؟
- اشترى خالد تلفازاً بمبلغ (142) ديناراً ، دفع من ثمنه عند الشراء (46) ديناراً ثم قسّط المبلغ الباقي على (6) أقساط شهرية متساوية ، فما قيمة القسط الواحد؟
- أيهما أكبر مساحة منطقة مستطيلة طولها 14 سم وعرضها 5 سم، أم مساحة منطقة مستطيلة أخرى طولها 9 سم وعرضها 7 سم؟

(5.1) تمارين ونشاطات:

1. اذكر تعريفاً للرياضيات.
2. ناقش العبارة: الرياضيات لغة.
3. ما دور الرياضيات في الحفاظ على التراث الثقافي؟
4. أذكر ثلاث تطبيقات للرياضيات في الحياة اليومية.
5. أعط مثالاً على كل من المفهوم المعرّف والمفهوم غير المعرّف.
6. ما المقصود بالتعريف الدائري؟
7. ما الفرق بين المسلّمة والنظرية؟
8. عرّف كلاً من الخوارزمية والمهارة.
9. أعطِ مثالاً على مسألة عددية في الرياضيات.
10. كيف تفسر تعدد فروع الرياضيات على الرغم من أن البنية الرياضية عملت على توحيد هذه الفروع؟
11. وصفت الرياضيات بأنها "ملكة العلوم وخادمتها" ناقش هذه العبارة.

الفصل الثاني

المنطق وأساليب البرهان

المنطق وأساليب البرهان

(1.2) مقدمة:

أخضع الإنسان ظاهرة التفكير للبحث والدراسة شأنها في ذلك شأن الظواهر الأخرى للكشف عن القوانين والعمل على تطويرها لتصبح أداة فعالة تساعده في كشف المزيد من الحقائق. ودرج الإنسان في التعبير عن معارفه بعبارات لغوية تكون أداة يستعملها في التفاهم مع الآخرين، فضلاً عن التعبير عن مشاعره وأفكاره .

والتفكير والتعبير نشاطان يمكن إخضاعهما لبعض القواعد والأسس التي تضمن سلامتهما وتساعد على الربط بين الصور الذهنية من جهة وسلامة التعبير عنها من جهة أخرى لنصل في نهاية المطاف إلى الحقيقة المرجوة، وهذا هو موضوع المنطق.

إن المنطق – موضوع هذا الفصل – هو الفكر الإنساني الذي يُدرس بقصد استخلاص القوانين اللازمة للتفكير السليم، مع أخذ اللغة بنظر الاعتبار كأداة للتعبير عن هذا التفكير من خلال تحديد مفهوم كل لفظ ومعنى كل تركيب وتوضيح كل علاقة بين الألفاظ مع وضع الشروط اللازمة للتأليف فيما بينها .

ولعل فهمنا لموضوع المنطق على هذا الأساس يساعدنا في تفسير سر تسميته بهذا الاسم، فكلمة منطق (كل ما يقبله العقل) مشتقة من النطق المرتبط بعملية التفكير، لهذا اعتاد الفلاسفة على تعريف الإنسان بأنه كائن ناطق إشارة إلى أن النطق المعبر عن التفكير هو الصفة الجوهرية التي تميز الإنسان عن غيره من الكائنات.

(2.2) العبارات الرياضية:

تعتبر الرياضيات القاعدة الأساسية للعلوم الأخرى، لهذا ينبغي أن تكون الكلمات والجمل المستعملة فيها ذات معنىً واضح ومحدد، وعليه انظر إلى الجمل الآتية:

$9 \in$ ط، $12 > 16$، ما اسمك؟، حضّر درسك.

تلاحظ أن كلاً من الجملة الأولى والجملة الثانية جملة إخبارية إما صائبة أو خاطئة، لكننا لا نستطيع الحكم على صواب أو خطأ الجملتين الأخيرتين، وعليه يطلق على كل من الجملتين الأولى والثانية مسمّى عبارة.

تعريف (1): العبارة جملة خبرية ذات معنىً يمكن أن يكون صواباً أو خطأ دون كليهما في آن واحد.

تعريف (2): قيمة الصواب للعبارة هي أن تكون صواباً أو خطأ.

وسيتم استخدام الرموز ف، ن، ل للعبارات الرياضية، واستخدام الرمز ص للدلالة على صواب العبارة والرمز (خ) للدلالة على خطئها.

فالعبارة ف: $9 \in$ ط عبارة صائبة.

والعبارة ن: $9 \notin$ ط عبارة خاطئة.

وعليه يطلق على العبارة (ن) نفي العبارة (ف)، ويمكن أن نرمز لها (~ ف) وتقرأ ليس (ف)، والجدول التالي يوضح قيم الصواب لكل من العبارة (ف) ونفيها:

"جدول الصواب للعبارة ونفيها"

ف	~ف
ص	خ
خ	ص

(1.2.2) العبارة المركبة:

لاحظ العبارات الآتية:

$8 + 6 = 14$ ، $9 \div 4 = 2$ ، $2 - 1 = 1$ و $7 - 5 = 2$

$6 \times 7 = 42$ أو $8 \times 5 = 13$ ، إذا كان $6 > 4$ فإن $6 > 1$.

إن كلاً من العبارتين الأولى والثانية عبارة بسيطة، أما العبارات التي ترتبط بأدوات الربط و،أو، إذا كان...... فإن، فتسمى عبارات مركبة.

تعريف (3): إذا ربطت عبارتان أو أكثر بإحدى أدوات الربط "و"، " أو" ، "إذا كان ... فإن" فإن العبارة الناتجة تسمى عبارة مركبة.

وسيتم استخدام الرمز " $\wedge$ " للدلالة على أداة الربط "و" والرمز " $\vee$ " للدلالة على أداة الربط "أو"، والرمز "$\rightarrow$" للدلالة على أداة الربط "إذا كان... فإن".

أما جداول الصواب لهذه العبارات المركبة فهي كالآتي :

جدول الصواب لأداة الوصل " و"

ف	ل	ف ∧ ل
ص	ص	ص
ص	خ	خ
خ	ص	خ
خ	خ	خ

جدول الصواب لأداة الوصل " أو "

ف	ل	ف ∨ ل
ص	ص	ص
ص	خ	ص
خ	ص	ص
خ	خ	خ

جدول الصواب للأداة الشرطية " إذا كان... فإن "

ف	ل	ف ← ل
ص	ص	ص
ص	خ	خ
خ	ص	ص
خ	خ	ص

ويمكنك أن تلاحظ أن ف $\wedge$ ل صائبة فقط إذا كانت مركبتاها ف، ل صائبتين معاً، وأن ف $\vee$ ل صائبة ما لم تكن كل من مركبتيها خاطئة.

أما ف ← ل فصائبة ما لم تكن (ف) صائبة و ل خاطئة.

ويجدر في هذا الصدد الإشارة إلى العبارة المركبة ف ↔ ل والتي تسمى العبارة الشرطية الثنائية، وتقرأ عادة "إذا وإذا فقط".

وهذه العبارة المركبة ليست إلاّ (ف ← ل) $\wedge$ (ل←ف)، وعليه يمكن تكوين جدول الصواب لها من خلال تكوين جدول الصواب للعبارة (ف←ل) $\wedge$ (ل←ف) كالآتي:

جدول الصواب للعبارة (ف ← ل) $\wedge$ (ل ← ف)

ف	ل	ف ← ل	ل← ف	(ف ←ل) $\wedge$ (ل← ف)
ص	ص	ص	ص	ص
ص	خ	خ	ص	خ
خ	ص	ص	خ	خ
خ	خ	ص	ص	ص

وعليه، فإن جدول الصواب للعبارة الشرطية الثنائية " إذا و إذا فقط " هو كالآتي :

جدول الصواب للعبارة الشرطية الثنائية " إذا و إذا فقط "

ف	ل	ف ↔ ل
ص	ص	ص
ص	خ	خ
خ	ص	خ
خ	خ	ص

أي أن ف ↔ ل صائبة في حالتين فقط عندما تكون مركبتاها صائبتين أو خاطئتين معاً .

مثال:

حدّد العبارات الصائبة فيما يأتي:

1. $6 \div 2 = 3$
2. $(3 + 4 = 5) \wedge (2 \times 9 = 16)$
3. $100 \leq 1$
4. إذا كان $2 = 1$ فإن $1 = 2$
5. $(4)^2 = 16 \leftrightarrow (-4)^2 = -16$

الحل:

1. $6 \div 2 = 3$ عبارة بسيطة صائبة.
2. $3 + 4 = 5$ عبارة بسيطة خاطئة ، $2 \times 9 = 16$ عبارة بسيطة خاطئة، وعليه فإن: $(3 + 4 = 5) \wedge (2 \times 9 = 16)$ هي عبارة مركبة خاطئة لأن كلاً من مركبتيها عبارة خاطئة.
3. $100 > 1$ عبارة بسيطة صائبة، $100 = 1$ عبارة بسيطة خاطئة، وعليه فإن $(100 > 1) \vee (100 = 1)$ عبارة مركبة صائبة لأنه عند استخدام أداة الوصل (أو) تكون إحدى المركبتين عبارة صائبة لتكون العبارة المركبة منهما صائبة.
4. $2 = 1$ عبارة بسيطة خاطئة، $1 = 2$ عبارة بسيطة خاطئة وعليه فإن $(2 = 1) \rightarrow (1 = 2)$ عبارة مركبة شرطية صائبة كما يتضح من جدول صوابها.
5. $(4)^2 = 16$ عبارة بسيطة صائبة، $(^-4)^2 = {}^-16$ عبارة بسيطة خاطئة وعليه فإن العبارة المركبة $[(4)^2 = 16] \leftrightarrow [(^-4)^2 = {}^-16]$ عبارة شرطية ثنائية خاطئة وفق جدول صوابها.

(2.2.2) الجمل المفتوحة:

اما الآن فاقرأ كلاً من الجملتين الآتيتين:

$\square + 2 = 5$ ، $س \div ص = 10$

ليس بالإمكان القول بأن أيّاً منهما يمكن أن نسميه عبارة ، لكن إذا عوّضنا عن الفراغ بالعدد 3 فإن $3 + 2 = 5$ عبارة صائبة، وإذا عوّضنا في الجملة الثانية عن س بالعدد 60 وعن ص بالعدد 3 مثلاً فإن:

$60 \div 3 = 10$ عبارة خاطئة.

إن كلاً من الجملتين قبل التعويض فيهما تسمى جملة مفتوحة.

تعريف (4): الجملة المفتوحة هي جملة خبرية تحتوي على متغير واحد أو أكثر وتتحول إلى عبارة عند إعطاء كل متغير قيمة محددة.

وسنرمز للجملة المفتوحة برمز يدل على المتغيرات فيها، فالجملة

☐ + 2 = 5 يمكن أن تكتب س + 2 = 5 ،وعليه يمكن أن نرمز لها بـ

ق (س).

أما الجملة س ÷ ص = 10 فيمكن أن نرمز لها بالرمز هـ (س، ص) لوجود متغيرين فيها.

(3.2.2) العبارات المسوّرة:

وفيما يخص مفهوم العبارة المسوّرة، نطرح المثالين الآتيين:

1. جميع الأعداد الأولية فردية.
2. بعض الأعداد الطبيعية زوجية.

إن المثال الأول يمثل عبارة مسوّرة يمكن كتابتها كالآتي:

$\forall$ س، ق (س)؛ وتقرأ لكل س، ق (س)، حيث " $\forall$ "رمز لكلمة جميع ، س رمز للعدد الأولي، ق (س) رمز للعدد الفردي.

ومن الواضح أن هذا التعميم (المسوّر كلياً) خطأ عند التعويض فيه من مجموعة التعويض، لأن العدد (2) عدد أولي لكنه ليس فردياً، حيث يكفي في العبارة المسوّرة كلياً مثال واحد معاكس لبيان عدم صحتها.

والمثال الثاني يمثل عبارة مسوّرة أيضاً ويمكن كتابتها كالآتي:

E س: هـ (س)؛ وتقرأ يوجد س حيث هـ (س)، لأن "E" رمز كلمة بعض أو يوجد، س رمز للعدد الطبيعي، هـ (س) رمز للعدد الزوجي، ومن الواضح أن هذا التعميم الجزئي (المسوّر جزئياً) صائب، لأنه مهما كان معنى كلمة بعض سواء لعدد محدود أو لعدد لانهائي من الأعداد الطبيعية الزوجية والتي تشمل مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الطبيعية، تبقى هذه العبارة المسوّرة جزئياً صائبة لأي تعويض فيها من مجموعة التعويض.

(3.2) أساليب البرهان:

تكون العبارات المراد برهانها على الصورة ف←ل، ويتم من خلال البرهان إثبات أن العبارة المراد برهانها ناتجة منطقياً من عبارات أخرى فُرضت أو تمت برهنتها، وسيتم التعرض في هذا السياق إلى نوعين من البراهين الرياضية المنطقية هما البرهان المباشر والبرهان غير المباشر.

(1.3.2) البرهان المباشر:

إن العبارة الشرطية ف←ل المراد برهانها تكون صائبة دائماً عدا الحالة التي تكون فيها ف صائبة، ل خاطئة، وعليه فإنه لبرهنة صواب هذه العبارة، نفرض أن ف صائبة ونبرهن أن ل صائبة من خلال مجموعة من العبارات الرياضية المنطقية التي يعتمد كل منها على سابقتها، أي أن:

ف	ل	ف ← ل
ص	ص	ص

وهذا هو أسلوب البرهان المباشر.

مثال (1):

برهن أنه إذا كان أ، ب عددين طبيعيين فرديين فإن أ+ ب عدد طبيعي زوجي.

المعطى: ف: أ، ب عددان فرديان.

المطلوب: ل: أ+ب عدد زوجي.

البرهان: نفرض أن ف صائبة، أي أن أ، ب عددان فرديان معطيان.

أ = 2 ن + 1: ن عدد طبيعي.

ب = 2م + 1: م عدد طبيعي.

وبالجمع ينتج أن أ+ ب = 2 ن+ 1 + 2م+ 1 = 2 (ن + م + 1) وبفرض أن : ن + م + 1 = ك، إذاً أ+ب= 2ك : ك عدد طبيعي.

وهكذا نتج أن العبارة ل صائبة، وعليه فإن ف←ل ككل عبارة رياضية صائبة.

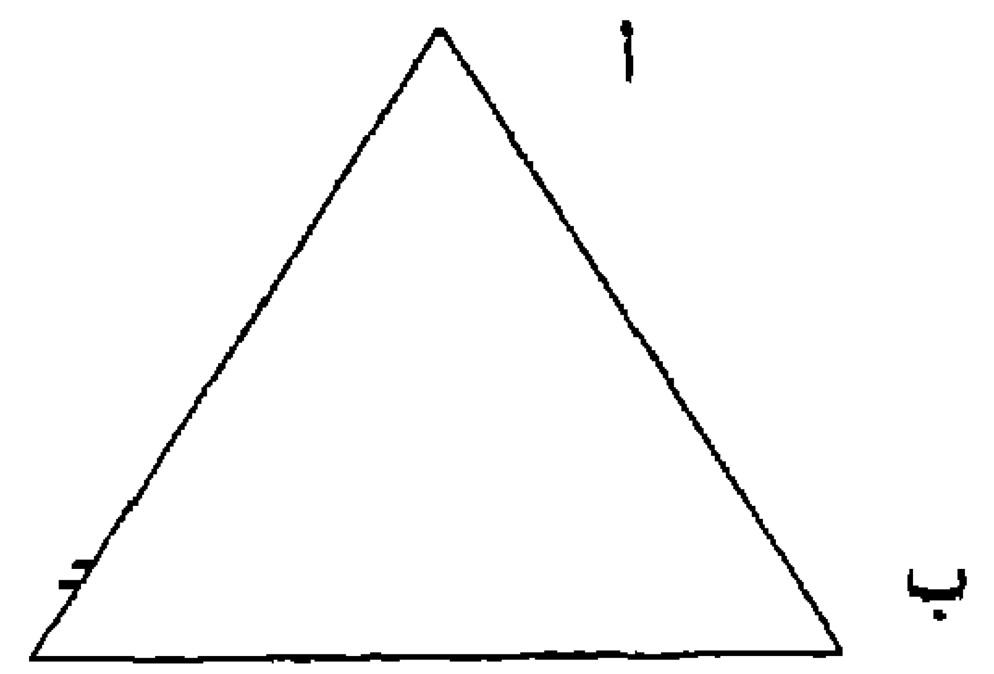
مثال (2):

برهن أن قياس أي زاوية من زوايا المثلث المتساوي الأضلاع = 60°.

المعطى: ف: أ ب حـ مثلث متساوي الأضلاع

المطلوب: ل: ق ∢ أ = ق ∢ ب= ق ∢ حـ = 60°

البرهان: نفرض أن أ ب حـ مثلث متساوي الأضلاع أي أن ف: صائبة.



ق ∢ ب = ق ∢ حـ (لأن أ ب = أ حـ).

ق ∢ أ = ق ∢ حـ (لأن أ ب = ب حـ).

وعليه فإن ق ∢ أ = ق ∢ ب = ق ∢ حـ (الشيئان المساويان لشيء ثالث متساويان).

لكن ق ∢ أ + ق ∢ ب + ق ∢ حـ = $180°$ (مجموع قياسات زوايا المثلث).

ق ∢ أ = ق ∢ ب = ق ∢ حـ = $\frac{180°}{3} = 60°$

وعليه فإن ل صائبة ، وبذلك تكون ف ← ل ككل عبارة رياضية صائبة.

(2.3.2) البرهان غير المباشر:

عند تعذر استخدام البرهان المباشر في إثبات صحة العبارة ف ← ل نلجأ إلى البرهان غير المباشر، وذلك بفرض أن ف ← ل المراد برهان صوابها خاطئة.

ويحدث هذا بموجب جدول الصواب عندما ف صائبة، ل خاطئة.

أي نفرض أن ل خاطئة، لكن عند ذلك وفي ضوء حقائق علمية معينة نصل إلى تناقض مع هذا الفرض، وبما أنه يستحيل وجود تناقض في التفكير المنطقي السليم، إذاً نكون قد أخطأنا في خطوة ما من خطوات البرهان، وحيث أنه تمّ خطوة خطوة دون أي خطأ رياضي منطقي، إذاً فالفرض الأول هو الخطأ أي أن ل يجب أن تكون صائبة وبذلك تصبح ف ← ل ككل صائبة.

مثال (1):

برهن أنه إذا كان $م^2$ عدداً زوجياً فإن م عدد زوجي.

المعطى: ف: $م^2$ عدد زوجي.

المطلوب: ل: م عدد زوجي.

ولبرهنة صواب ف←ل باستعمال البرهان غير المباشر، نفرض أن هذه العبارة خاطئة، أي نفرض أن ف صائبة، ل خاطئة.

البرهان:

نفرض كما أسلفنا أن ل خاطئة، أي ~ل صائبة، أي أن م عدد فردي.

وبالتالي فإن م = 2 ن + 1 : ن عدد طبيعي.

إذن :

$$م^2 = (2ن + 1)^2 = 4ن^2 + 4ن + 1$$

$$= 2(2ن^2 + 2ن) + 1$$

$$= 2ك + 1$$: ك عدد طبيعي

أي أن $م^2$ عدد فردي، وهذا يتناقض مع المعطى.

إذن:

يجب تصحيح ما فرضناه، أي أن م يجب أن يكون عدداً زوجياً.

وبذلك ف ← ل ككل صائبة.

وعليك أن تتذكر في هذا الصدد أن:

ف ← ل تكافئ ~ل ← ~ ف.

وبذلك يتم تحويل برهان التناقض إلى نوع آخر من البرهان غير المباشر والذي يسمى بالمعاكس الإيجابي والذي يتم فيه نفي المطلوب ليؤدي إلى نفي المعطى (المعطيات).

مثال (2):

برهن أنه إذا كان أ ب حـ مثلث، أ ب ≠ أ حـ فإن

ق ∠ ب ≠ ق ∠ حـ.

المعطى : ف: أ ب حـ مثلث ، أ ب ≠ أ حـ.

المطلوب : ل : ق ∠ ب ≠ ق ∠ حـ.

البرهان: نفرض عكس المطلوب صواباً.

أي أن ق ∠ ب = ق ∠ حـ في المثلث أ ب حـ.

إذن ، أ ب = أ حـ (بموجب نظرية المثلث المتساوي الساقين)

وهكذا أدّى عكس المطلوب إلى عكس المعطى ~ل ← ~ف صائبة وبذلك تكون ف ← ل المكافئة لها صائبة.

(3.3.2) أساليب أخرى للبرهان:

لاحظت في البرهان المباشر تم اعتماد أن ف←ل صائبة عندما تكون ف صائبة، ل صائبة، لكن هنالك برهان آخر يتمثل في حصر جميع الحالات الممكنة كما الحال في جداول الصواب، وعليه فإن هذا الأسلوب يعتبر برهاناً مباشراً أيضاً، لكن من غير المألوف استعمال حصر جميع الحالات الممكنة وبخاصة عند كثرة هذه الحالات.

ولاحظت أيضاً في البرهان غير المباشر الربط بين برهان التناقض وبرهان المعاكس الايجابي، ويبدو جلياً أن برهان التناقض أسرع وبخاصة إذا ما وصلنا إلى تناقض ما أثناء خطوات البرهان مع إحدى الحقائق الرياضية بينما في المعاكس الإيجابي نكون مضطرين للسير في الخطوات إلى أن نصل إلى عكس المعطى (المعطيات).

وإضافة إلى الأساليب السابقة؛ أسلوب البرهان بالمثال المعاكس، وهو برهان غير مباشر أيضاً ويتمثل في إيجاد مثالٍ واحد على الأقل يتعارض والعبارة المعطاة، كما يتضح من المثال الآتي..

مثال:

برهن أن: مجموع أي عددين أوليين هو عدد أولى

الحل:

تعلم أن 2 عدد أولي، 3 عدد اولي ، وأن مجموعهما

$2 + 3 = 5$ عدد أولي.

وتعلم أيضاً أن 2 عدد أولي، 5 عدد أولي ، وأن مجموعهما (7) عدد أولي .

لكن 5 عدد أولي، 7 عدد أولي بينما مجموعهما (12) عدد غير أولي، إن هذا مثال معاكس وعليه فالقاعدة المعطاة مرفوضة.

(4.2) تمارين ونشاطات:

1. ضع إشارة (×) على رمز الإجابة الصحيحة لكل فقرة مما يلي :

1. العبارة الرياضية مما يلي هي :
   أ. س عدد طبيعي < 5.
   ب. $3 < 7$.
   ج. أعطه عشرة قروش.
   د. ما العدد التالي للعدد 18؟

2. إذا كانت ف صائبة، ل خاطئة فإن العبارة المركبة منهما والتي تكون دائماً صائبة هي:
   أ. ف ← ل.
   ب. ف $\wedge$ ل.
   ج. ف $\vee$ ل.
   د. ~ف $\wedge$ ل.

3. إذا كانت ف خاطئة ، ل صائبة فإن العبارة المركبة منهما والتي تكون دائماً صائبة هي:
   أ. ل ← ف
   ب. ف ← ل
   ج. ف $\wedge$ ~ل
   د. ف $\wedge$ ل

4. حدّد العبارة الصائبة فيما يلي :
   أ. عمان عاصمة الأردن والزرقاء مدينة ساحلية.
   ب. جامعة الإسراء جامعة حكومية أو الجامعة الأردنية جامعة خاصة.
   ج. $(1 \neq 0) \leftarrow (2 \neq 1)$.
   د. ليس صحيحاً أن $(1+4=5) \vee (2+3=5)$.

5. **العبارة المكافئة للعبارة ~ل ← ف هي:**

أ. ~ل ← ~ف.

ب. ~ف ← ل.

ج. ف ← ~ل.

د. ل ← ~ف.

2. **حدد قيم الصواب لكل عبارة من العبارات المركبة الآتية:**

أ. $(6 \geq 4) \vee (9 < 1)$

ب. $(2 + 1 = 3) \wedge$ مجموع قياسات زوايا المثلث = $360°$

ج. إذا كان $1 + 1 = 0$ في النظام العددي العشري فإن الشمس تشرق من الغرب

د. الإنسان فانٍ إذا و إذا فقط كانت الأسماك باقية

3. إذا كانت ف، ل عبارتين رياضيتين، كوّن جدول الصواب للعبارة ~ف$\vee$ل، ثم قارن قيم صواب هذه العبارة وقيم صواب ف←ل.

4. استخدام البرهان المباشر في برهنة أن:

أ. إذا كان أ ، ب عددين زوجيين فإن أ + ب عدد زوجي.

ب. إذا كان م عدداً فردياً فإن م^2 عدد فردي.

5. استخدام البرهان غير المباشر في برهنة أن :

أ. إذا كان أ ب حـ مثلث ، ق$\measuredangle$أ $\neq$ ق$\measuredangle$ب فإن ب حـ $\neq$ أ ب

ب. إذا كان م$^2 > 0$ ؛ (م عدد صحيح) فإن م $\neq 0$

6. استخدام أي برهان تراه مناسباً في بيان صحة أو عدم صحة كل من:

أ. مربع أي عدد فردي هو عدد زوجي.

ب. س$^2 + 16 =$ (س + 4) (س − 4) ، لأي عدد صحيح س.

الفصل الثالث

مفاهيم رياضية حديثة

مفاهيم رياضية حديثة

(1.3) مقدمة:

قد يشير عنوان هذا الفصل الشك في مضمونه، أهو مجرد مفاهيم رياضية حديثة رغب المؤلفان في التعرّض لها أم أن هنالك حقائق رياضية مرتبطة بهذه المفاهيم ستؤخذ في الحسبان؟

والحقيقة أن هذه المفاهيم أساسية لتعلم الرياضيات في الصفوف الابتدائية الأولى، لدورها في توضيح مفاهيم الأعداد والعمليات عليها والترابط والتدرج فيما بينها، فضلاً عن دورها في اكتساب المهارات الرياضية على أساس استيعاب المعلومات والاقتناع بالإجراءات.

وعليه فقد تعرض المؤلفان لهذه المفاهيم مع تغطية عدة جوانب أخرى لا يُستغنى عنها كالعمليات عليها وأنواعها وخواصها، ليكون العرض شاملاً وفي الوقت نفسه مبسطاً يلائم المستوى التعليمي الذي وضع الكتاب لأجله.

(2.3) المجموعات والعمليات عليها:

تتصف المجموعة بأنها تجمّع من أشياء معرّفة تعريفاً دقيقاً ومتمايزة، وتسمى هذه الأشياء عناصر، فطلبة صف ما يشكلون مجموعة هم عناصرها، إذ إن كل طالب فيه مميز تماماً، حيث نستطيع القول بأن طالباً ما من الصف بينما طالب آخر ليس منه، كما أن طلبة الصف مختلفون عن بعضهم وإن اشترك اثنان بالاسم نفسه.

أي أن المجموعة تتكون من عناصر معرّفة جيداً ومختلفة :

Well – defined and distinct elements.

(1.2.3) الانتماء والاحتواء والتساوي في المجموعات:

تتحدد المجموعة بذكر عناصرها أو بالصفة المشتركة بين هذه العناصر، فالمجموعة {خالد، أحمد، ندى} تحددت بذكر عناصرها وأحيطت هذه العناصر بقوسين يسميان بحاصرتي المجموعة، ويقال بأن خالد عنصر من هذه المجموعة أو خالد ينتمي إلى هذه المجموعة ويرمز لذلك بـ:

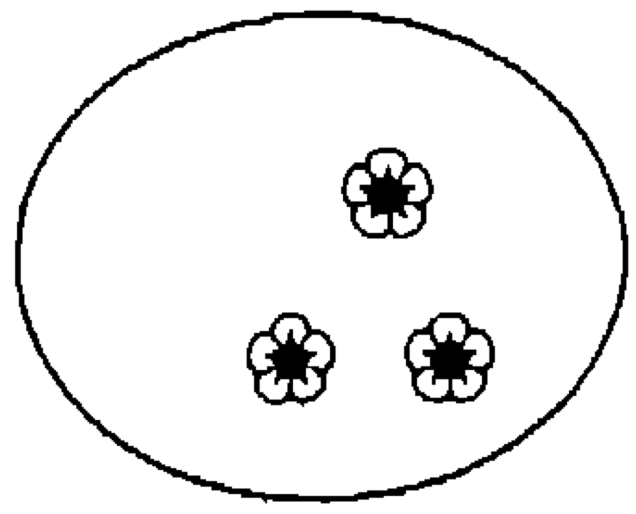
خالد $\in$ {خالد، أحمد، ندى}، بينما سعيد لا ينتمي إلى هذه المجموعة، أي سعيد $\notin$ {خالد، أحمد، ندى}.

وإذا قيل مجموعة أساتذة كلية ما، فهي معرّفة جيداً أيضاً وعناصرها مختلفة، وقد تم تحديدها بذكر الصفة المشتركة بين عناصرها.

وإذا حوت المجموعة عنصراً واحداً سميت مجموعة أحادية العنصر، وإذا حوت عنصرين سميت مجموعة ثنائية العناصر، وإذا لم تحوِ على أي عنصر سميت بالمجموعة الخالية، وإذا أمكن الانتهاء من عدّ عناصر المجموعة سميت مجموعة منتهية؛ أما إذا كان عدد عناصرها كثيراً جداً لا نصل إلى نهايته سميت مجموعة غير منتهية.

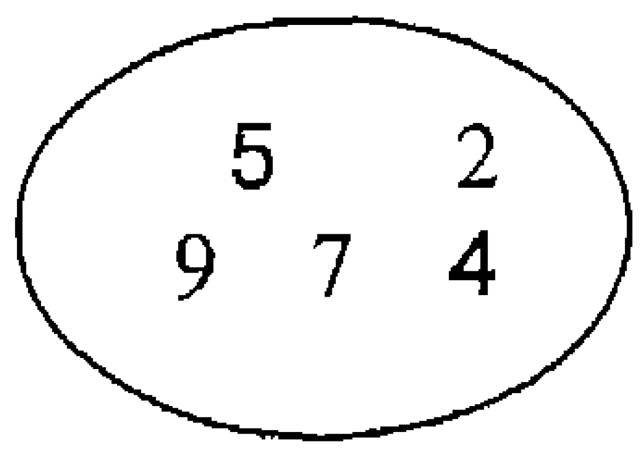
فمثلاً المجموعة {مسطرة، قلم} مجموعة ثنائية، والمجموعة { } مجموعة خالية ويرمز لها بالرمز Φ؛ وتقرأ "فاي"، وتعتبر المجموعة {3، 4، 5،...،10} مجموعة منتهية، بينما المجموعة {1،3،5، ...} مجموعة غير منتهية وتدعى بالصفة المميزة لها مجموعة الأعداد الطبيعية الفردية.

وعادة ما توضح المجموعة بشكل منحني مغلق في المستوى يسمى بشكل ڤن (نسبة إلى عالم الرياضيات ڤن)، فالشكل المبين يمثل مجموعة تتكون من ثلاث زهرات رسمت داخل شكل ڤن.



وينبغي ملاحظة أن هذه الزهرات وإن تشابهت في الشكل إلا أنها مختلفة عن بعضها، إذ لكل زهرة منها صفاتها التي تميزها عن أي زهرة أخرى.

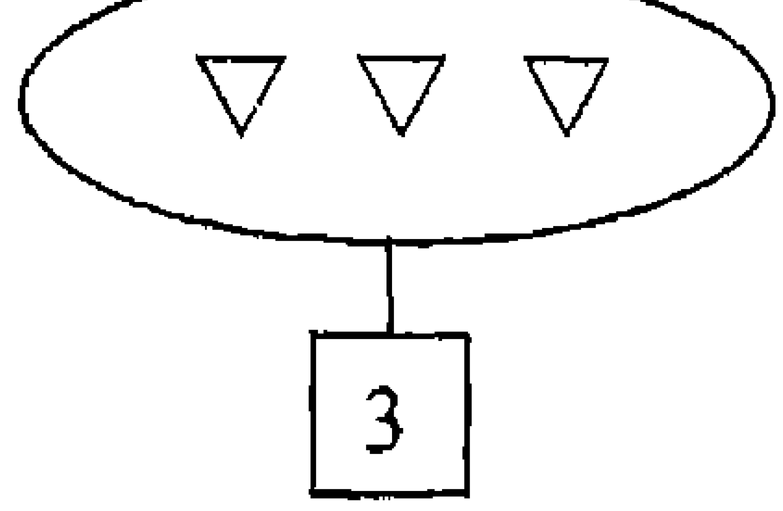
والشكل ڤن المبين أدناه يوضح مجموعة خماسية تتكون من الأعداد 2، 5، 9،7، 4 أي المجموعة {2 ، 5، 7 ،9، 4}



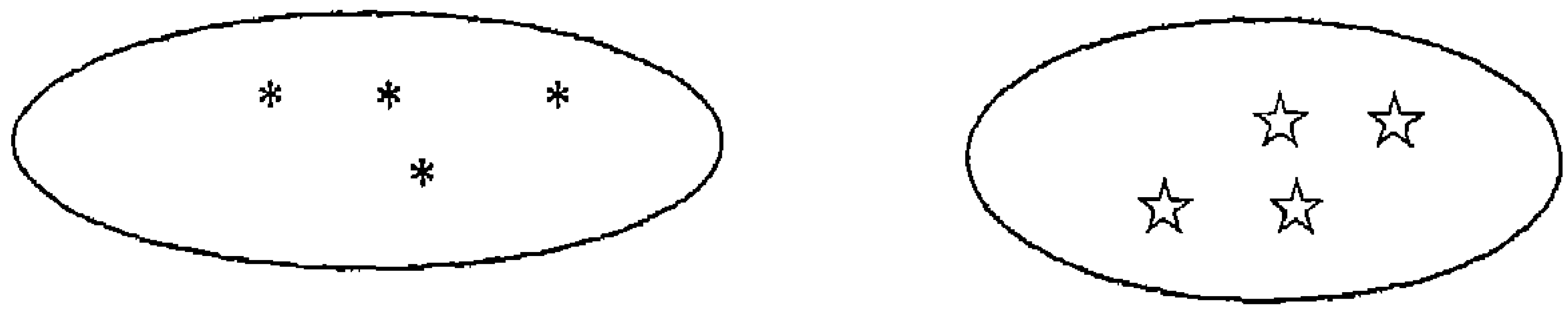
ويمكن أن تكتب المجموعة السابقة بالصورة {9،2،7،4،5} ؛ إذ أن تغيير ترتيب العناصر في المجموعة ليس له أي تأثير على المجموعة، وبالتالي فإن ترتيب العناصر بين حاصرتي المجموعة لا يجعل منها مجموعة غيرها، أي أن المجموعتين متساويتان لأن كل عنصر في إحداهما موجود في الأخرى.

والعدد صفة لمجموعة من الأشياء يبين لنا "كم" العناصر في مجموعة ما، فعند القول أ مجموعة ثلاثية فإن العدد الدال على هذه المجموعة هو العدد (3)، وعليه يمكن القول بأن رئيس هذه المجموعة هو العدد (3).

أما الخط الواصل بين شكل ڤن المبين والمربع أسفله فهو للربط فقط بين هذه المجموعة ورئيسها (العدد الدال على كم عناصرها).



ويقال بأن المجموعتين متكافئتان إذا وإذا فقط كان رئيساهما متساويين، أي أنهما متساويتان في عدد العناصر . والرسم المبين يوضح مجموعتين متكافئتين لأن رئيس كل منهما هو العدد (4) .

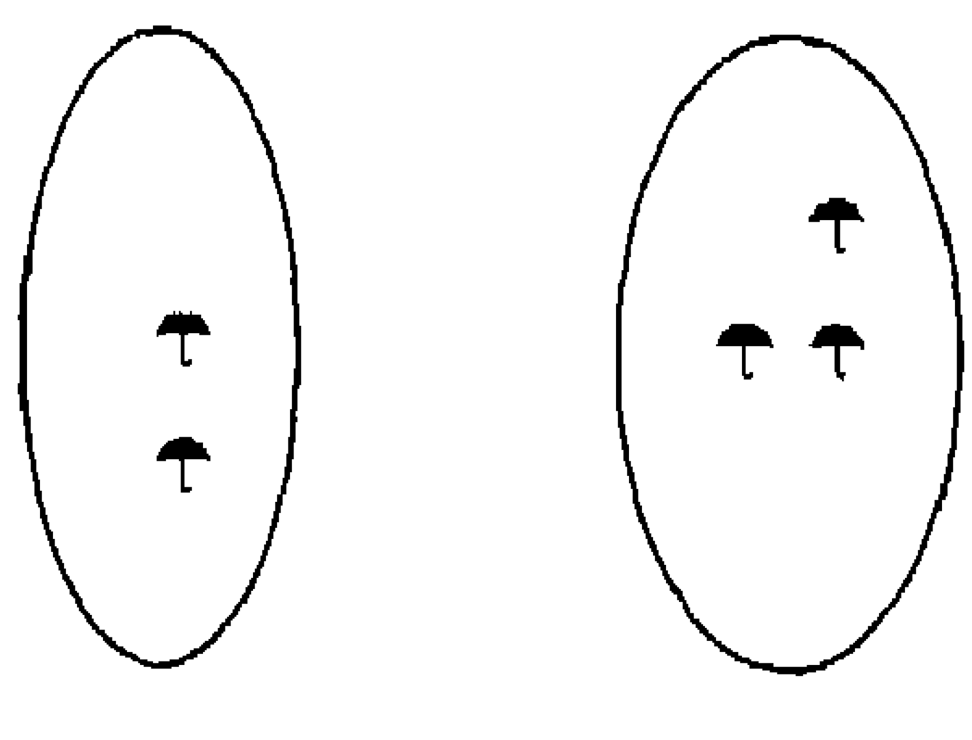


وعليه يمكن القول بأن مجموعتين غير متكافئتين إذا اختلفتا في عدد عناصرهما، بمعنى أن عدد عناصر إحداهما أكثر من عدد عناصر الأخرى، أو أن عدد عناصر المجموعة الثانية أقل من عدد عناصر المجموعة الأولى .

وعليه يمكن وصف المجموعات من حيث عدد عناصرها باستعمال: أكثر من، ويقدر، وأقل من.

أما الأعداد الدالة على "كم" العناصر في هذه المجموعات فإنه يمكن وصفها وصفاً مقارناً: أكبر من، يساوي، أصغر من.

والمثال التالي يوضح ذلك:



إن المجموعة اليمنى تحتوي عناصر أكثر من المجموعة اليسرى، وحيث أن رئيس المجموعة اليمنى هو العدد (3) ورئيس المجموعة اليسرى (2)، إذاً يُقال 3 أكبر من 2 ويرمز لذلك 3<2 حيث الإشارة ">"تدل على أكبر من، وعليه"<" تستعمل للدلالة على أصغر من، بينما الإشارة "=" تستعمل للدلالة على التساوي.

ويقال لمجموعة ما بأنها محتواه في أو مجموعة جزئية من مجموعة أخرى إذا وإذا فقط كان كل عنصر في المجموعة الأولى موجوداً في المجموعة الثانية؛ وبلغة الرموز أ محتواه في ب إذا وإذا فقط كان لكل س ∈ أ فإن س ∈ب.

وبلغة الرموز الرياضية: (أ ⊆ ب ↔ ∀س∈أ ← س ∈ ب)

حيث "⊆" هو رمز الاحتواء الذي يسمح بتساوي المجموعتين أ، ب أو أن أ ⊂ ب بمعنى أن أ مجموعة جزئية فعلية من ب، لكنها لا تساويها.

إن مجموعة الطلبة الذين يلبسون نظارات في صفك مجموعة جزئية من مجموعة طلبة الصف، وهي مجموعة جزئية فعلية إذا كان عدد الطلبة لابسي النظارات أصغر من عدد طلبة الصف.

وعند عدم وجود أي طالب يلبس نظارة، فإنه يعبر عن ذلك بالمجموعة الخالية، والمجموعة الخالية مجموعة جزئية لأي مجموعة معطاة.

كما أن أي مجموعة أ مجموعة جزئية لنفسها أ ⊆ أ ، لكنها ليست مجموعة جزئية فعلية لنفسها .

وتتساوى المجموعتان إذا وإذا فقط كانت كل منهما مجموعة جزئية للأخرى، أي أن:

أ = ب ↔ أ ⊆ ب و ب ⊆ أ

وكما رمز لعدم الانتماء بالرمز ∉، فإنه يرمز لعدم الاحتواء بالرمز ⊈ ولعدم التساوي بالرمز ≠.

وفيما يلي مثال توضيحي:

إذا كانت أ = {4، 1}، ب = {3، 4، 5} ، حـ = {4، 1}، د = {5، 3} فإن:

د ⊂ ب ، أ ⊄ ب ، حـ = أ ، أ تكافئ د ، ب ≠ حـ ، وهكذا ......

وعندما تكون مجموعة ما مجموعة شاملة لعدد من المجموعات ، بمعنى أن هذه المجموعات مجموعات جزئية لها ؛ فمثلاً كل من مجموعة الأعداد الزوجية ومجموعة الأعداد الفردية ومجموعة الأعداد الأولية مجموعات جزئية من مجموعة الأعداد الطبيعية، فقد دعت الحاجة إلى رمز خاص للمجموعة الشاملة وليكن ش؛ والتي سيتم التعامل معها فيما بعد...

(2.2.3) العمليات على المجموعات:

سيتم التعرض إلى أربع عمليات على المجموعات هي: الاتحاد والتقاطع والعزل والتتام، وستلحظ الترابط بين المجموعات والعبارات الرياضية من خلال التعاريف الواردة.

أولاً: عملية الاتحاد:

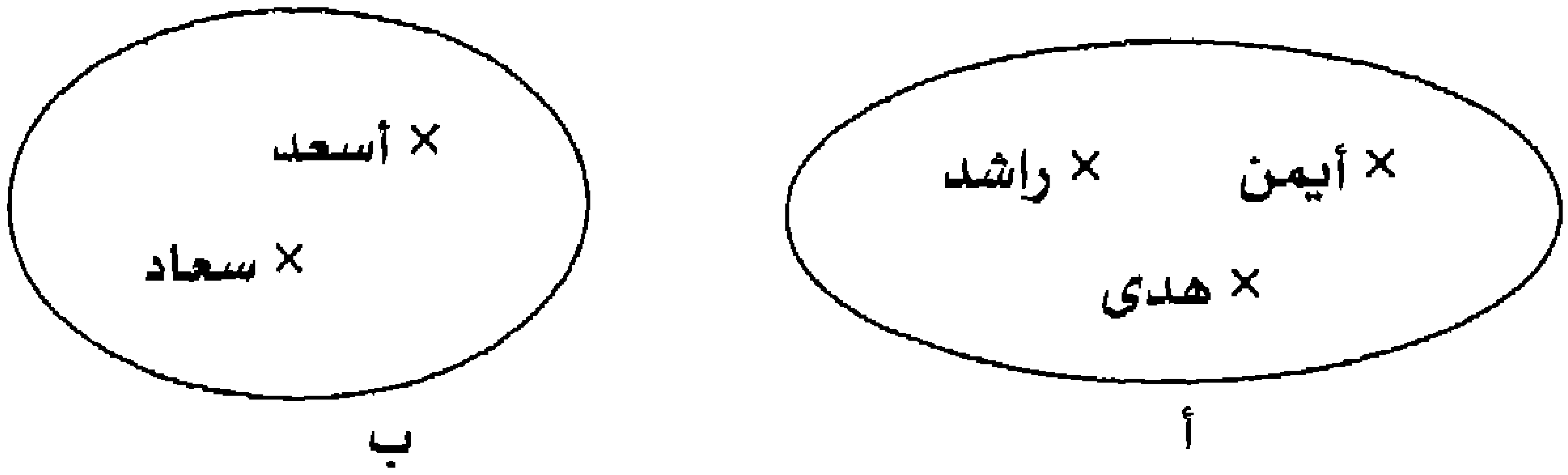
إذا كانت أ، ب مجموعتين، فإن أ إتحاد ب هو المجموعة التي تتكون من جميع العناصر في هاتين المجموعتين، ويرمز للاتحاد بالرمز.

" ∪ "، **وكتعريف لعملية الاتحاد بلغة الرموز:**

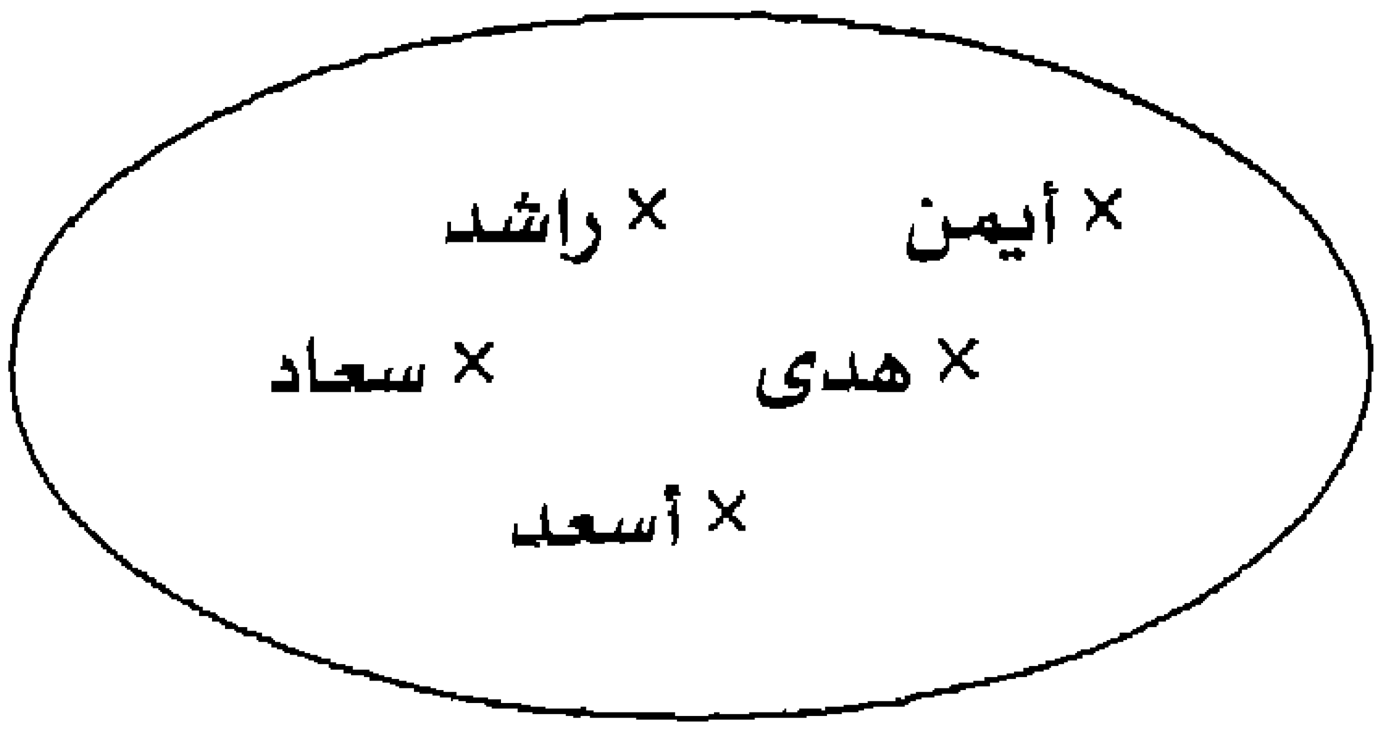
أ ∪ ب = { س : س ∈ أ أو س ∈ ب }

فإذا كانت أ = {أيمن، راشد، هدى}، ب = {أسعد، سعاد} ،

فإن أ ∪ ب = {أيمن، راشد، هدى، أسعد، سعاد} وباستعمال أشكال ڤن



فإن أ ∪ ب يمثل بـ



وحيث أن رئيس أ هو العدد 3 ورئيس ب هو العدد 2 فإن رئيس أ ∪ ب هو العدد 5.

وبعبارة أخرى إذا رمزنا لعدد عناصر أ بـ ن (أ) وعدد عناصر ب بـ ن (ب) فإن:

ن (أ ∪ ب) = ن (أ) + ن (ب)

= 3 + 2

= 5

لكن هل هذه العلاقة صحيحة دائماً؟ أي هل رئيس اتحاد مجموعتين يساوي مجموع رئيسيهما؟

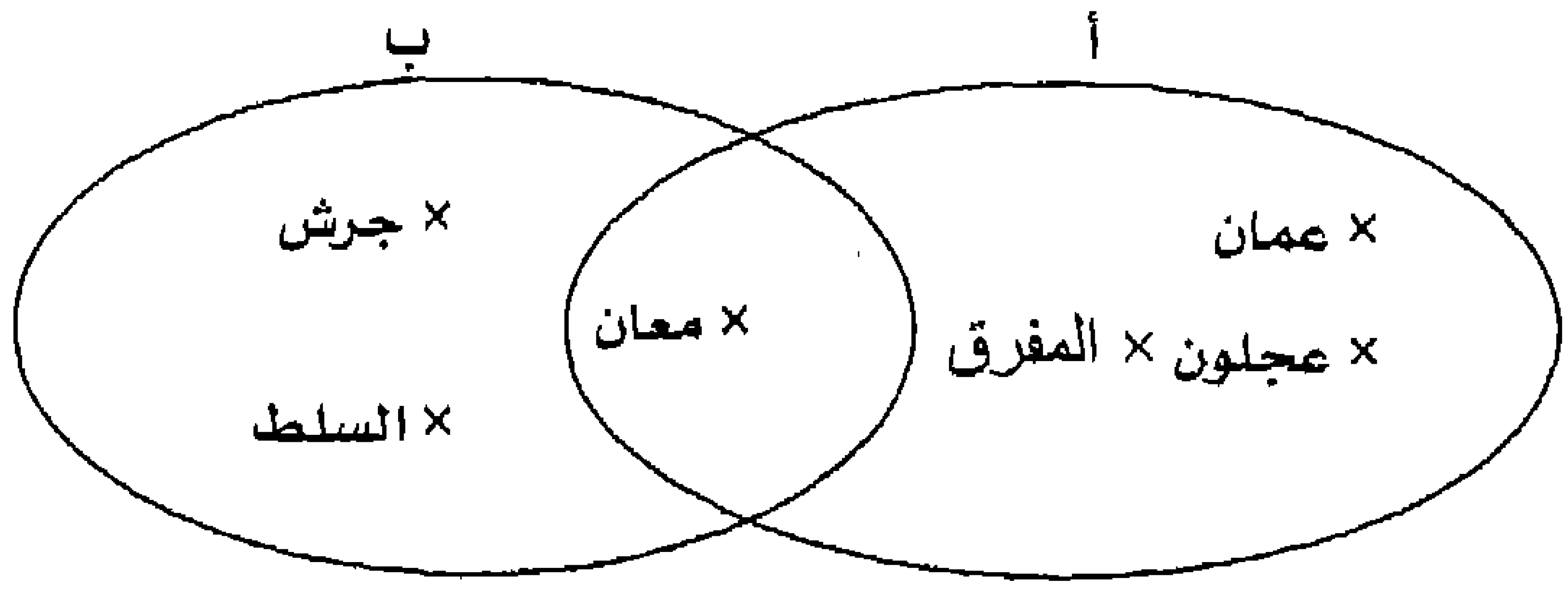
قطعاً الإجابة لا، والمثال التالي يوضح ذلك:

إذا كانت أ = {عمان، معان، عجلون، المفرق}، ب = {جرش، السلط، معان} فإن :

ن (أ) = 4 ، ن (ب) = 3

لكن ن (أ ∪ ب) = 6

وإن $4 + 3 \neq 6$ ، أي أن رئيس اتحاد هاتين المجموعتين لا يساوي مجموع رئيسيهما؛ لوجود عنصر مشترك بين هاتين المجموعتين ويتضح ذلك من الشكل التالي:



لهذا نقول بأن المجموعتين أ، ب في المثال الأول منفصلتين، بينما في المثال الحالي غير منفصلتين.

ويتضح مفهوم الاتحاد من خلال جدول الانتماء كالآتي:

جدول الانتماء لعملية الاتحاد

أ	ب	أ ∪ ب
∋	∋	∋
∋	∌	∋
∌	∋	∋
∌	∌	∌

أي أن العنصر ينتمي لاتحاد مجموعتين دائماً عدا الحالة الوحيدة التي يكون العنصر فيها غير منتمٍ لكل من المجموعتين.

خصائص عملية الاتحاد:

تحقق عملية الاتحاد على المجموعات الخصائص الآتية:

1. أ ∪ ب = ب ∪ أ (الخاصية الابدالية).
2. أ ∪ أ = أ (خاصية اللانمو).
3. أ ∪ ش = ش.
4. أ ∪ Φ = أ.
5. (أ ∪ ب) ∪ حـ = أ ∪ (ب ∪ حـ) (الخاصية التجميعية).

مثال توضيحي:

إذا كانت ش = {1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9}، وكانت أ = {1، 2، 3، 4}،

ب = {3، 5، 7}، ج = {7، 8}، فإن:

1. أ ∪ ب = {1، 2، 3، 4، 5، 7}

ب ∪ أ = {1، 2، 3، 4، 5، 7}

أي أن أ ∪ ب = ب ∪ أ

2. أ ∪ أ = {1، 2، 3، 4}

أي أن أ ∪ أ = أ

3. أ ∪ ش = ش، لأن أ ⊂ ش

أي أن أ ∪ ش = ش

4. أ ∪ Φ = أ ∪ { } = {1، 2، 3، 4}

أي أن أ ∪ Φ = أ

5. (أ ∪ ب) ∪ ج = { 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 7 } ∪ { 7 ، 8 }

= { 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 7 ، 8 }

أ ∪ (ب ∪ ج) = { 1 ، 2 ، 3 ، 4 } ∪ {3 ، 5 ، 7 ، 8 }

= { 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 7 ، 8 }

وتجدر الإشارة إلى أنه يمكن إثبات صحة الخصائص السابقة باستخدام تعريف عملية الاتحاد على المجموعات بالرموز، كما يمكن إثبات صحتها باستخدام جدول الانتماء لعملية الاتحاد.

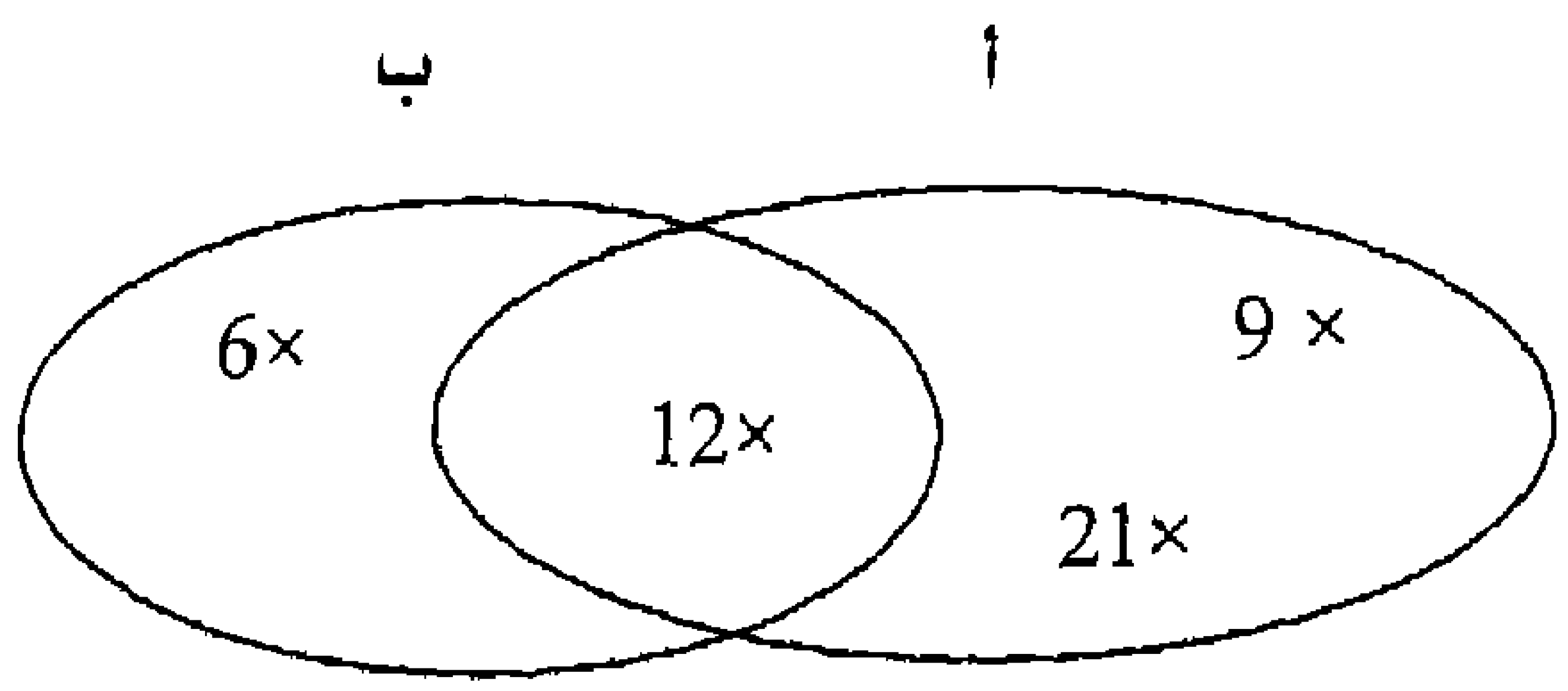
ثانياً: عملية التقاطع:

يعرّف التقاطع بين مجموعتين على أنه المجموعة التي تضم العناصر المشتركة بين المجموعتين، فتقاطع المجموعتين أ، ب والذي يرمز له بـ "∩" يعرّف بلغة الرموز كالآتي: أ ∩ ب = {س: س ∈ أ و س ∈ ب}

فمثلاً:

إذا كانت أ = { 9 ، 12 ، 21 } ، ب = { 6 ، 12 }

فإن أ ∩ ب = { 12 } ، ويظهر التقاطع من خلال أشكال ڤن بالمنطقة المشتركة بين المجموعتين أ ، ب كما في الشكل الآتي:



وحيث أن رئيس أ هو العدد 3، ورئيس ب هو العدد 2 فإن رئيس أ ∩ ب هو العدد 1، بينما رئيس أ ∪ ب هو العدد 4، أي أن:

ن (أ) + ن (ب) = ن (أ ∪ ب) + ن (أ ∩ ب).

وبصيغة أخرى:

ن (أ ∪ ب) = ن (أ) + ن (ب) - ن (أ ∩ ب).

وهي الصيغة العامة للعلاقة بين عدد عناصر كل من أ، ب، أ ∪ ب، أ ∩ ب.

وعندما تكون المجموعتان منفصلتين أي أن:

أ ∩ ب = Φ، فإن ن (أ ∩ ب) = ن (Φ) = 0

وعليه فإن ن (أ ∪ ب) = ن (أ) + ن (ب)، وتعتبر هذه العلاقة حالة خاصة من الصيغة العامة الواردة سابقاً.

وفيما يلي توضيح لعملية التقاطع من خلال جدول الانتماء:

جدول الانتماء لعملية التقاطع

أ	ب	أ ∩ ب
∋	∋	∋
∋	∌	∌
∌	∋	∌
∌	∌	∌

أي أن العنصر ينتمي لتقاطع مجموعتين في حالة واحدة فقط هي انتماؤه لكل منهما في آن واحد.

خصائص عملية التقاطع:

تحقق عملية التقاطع على المجموعات الخصائص الآتية :

1. أ ∩ ب = ب ∩ أ (الخاصية الابدالية).
2. أ ∩ أ = أ (خاصية اللانمو).
3. أ ∩ ش = أ.
4. أ ∩ Φ = Φ .
5. (أ ∩ ب) ∩ ﺣ = أ ∩ (ب ∩ ﺣ) (الخاصية التجميعية).

مثال توضيحي:

إذا كانت ش = {1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9}، وكانت:

أ = {1،2،3،4}،

ب = { 7 ، 5 ، 3}،

ج = { 8 ، 3 } ، فإن :

1. أ ∩ ب = { 3 }

ب ∩ أ = { 3 }

أي أن أ ∩ ب = ب ∩ أ

2. أ ∩ أ = { 4 ، 3 ، 2 ، 1 }

أي أن أ ∩ أ = أ

3. أ ∩ ش = أ ، لأن أ ⊂ ش

أي أن أ $\cap$ ش = أ

4. أ $\cap$ Φ = أ $\cap$ { } = { }

أي أن أ $\cap$ Φ = Φ

5. (أ $\cap$ ب) $\cap$ حـ = { 3 } $\cap$ { 3 ، 8 } = { 3 }

أ $\cap$ (ب $\cap$ حـ) = { 1 ، 2 ، 3 ، 4 } $\cap$ { 3 } = { 3 } .

أي أن (أ $\cap$ ب) $\cap$ حـ = أ $\cap$ (ب $\cap$ حـ)

وتجدر الإشارة إلى أنه يمكن إثبات صحة الخصائص السابقة كما في عملية الاتحاد باستخدام تعريف عملية التقاطع على المجموعات بالرموز، كما ويمكن إثبات صحتها باستخدام جدول الانتماء لعملية التقاطع ، وبالمثل لخصائص التتام والعزل التي ستأتي لاحقاً.

ثالثاً: عملية التتام:

تعرّف متتمة مجموعة جزئية من المجموعة الشاملة على أنها المجموعة التي تضم جميع عناصر المجموعة الشاملة التي لا توجد في هذه المجموعة؛ فإذا كانت أ مجموعة جزئية من ش، فإن متممة أ والتي يرمز لها بالرمز $\overline{أ}$ (وتقرأ متتمة أ) هي:

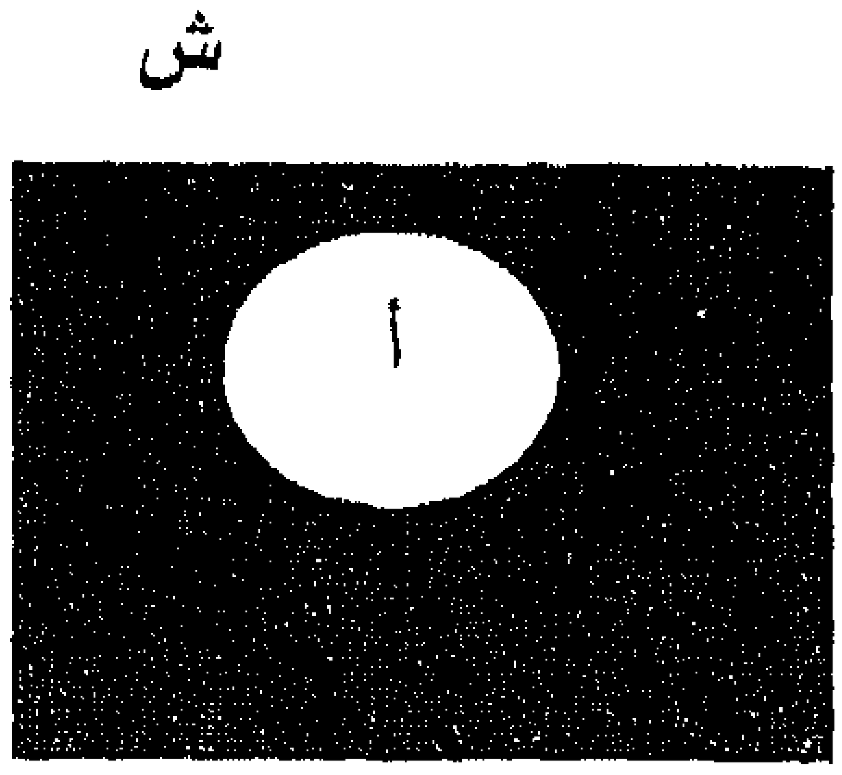
$\overline{أ}$ = { س : س ∈ ش و س ∉ أ }

فمثلاً:

إذا كانت ش = { 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 } ، أ = { 1 ، 2 }

فإن $\overline{أ}$ = { 3 ، 4 ، 5 }

وتتضح العلاقة بين ش، أ، أ̄ من خلال شكل ڤن كالآتي:



كما أن ن (ش) = ن (أ) + ن (أ̄)، لأن أ ∩ أ̄ = Φ

وعليه، فإن ن (أ̄) = ن (ش) - ن (أ).

وفيما يلي توضيح للتتام في المجموعات من خلال جدول الانتماء:

جدول الانتماء لعملية التتام

أ	أ̄
∈	∉
∉	∈

أي أن العنصر ينتمي إما للمجموعة المعطاة أو لمتممتها ولا يجوز أن يكون في كليهما معاً.

خصائص عملية التتام:

تحقق عملية التتام للمجموعات الخصائص الآتية:

1. أ ∩ أ̄ = Φ
2. أ ∪ أ̄ = ش
3. $\overline{(\bar{أ})}$ = أ

مثال توضيحي:

إذا كانت ش = $\{1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 ، 9\}$، وكانت أ= $\{1، 2، 3 ، 4\}$ ، فإن:

1. أ $\cap$ $\overline{أ}$ = $\{1 ، 2 ، 3 ، 4\} \cap \{5 ، 6 ، 7 ، 8 ، 9\}$ = Φ

أي أن أ $\cap$ $\overline{أ}$ = Φ

2. أ $\cup$ $\overline{أ}$ = $\{1 ، 2 ، 3 ، 4\} \cup \{5 ، 6 ، 7 ، 8 ، 9\}$ = ش

أي أن أ $\cup$ $\overline{أ}$ = ش

3. $\overline{(\overline{أ})}$ = $\overline{\{1 ، 2 ، 3 ، 4\}}$ = أ

أي أن $\overline{(\overline{أ})}$ = أ

رابعاً: عملية العزل (الفرق):

لتعريف عزل مجموعة (ب) مثلاً من المجموعة أ فإن (أ عدا ب) هو مجموعة تتكون من العناصر الموجودة في أ على أن لا تكون مشتركة بين أ، ب؛ ويرمز لِ (أ عدا ب) بالرمز (أ – ب)، وبالرموز :

أ – ب = { س : س $\in$ أ و س $\notin$ ب }

وبأسلوب آخر أ – ب = أ – (أ $\cap$ ب) .

فمثلاً:

إذا كانت أ = { قلم، مسطرة ، فرجار } ، ب = { قلم ، مبراة }

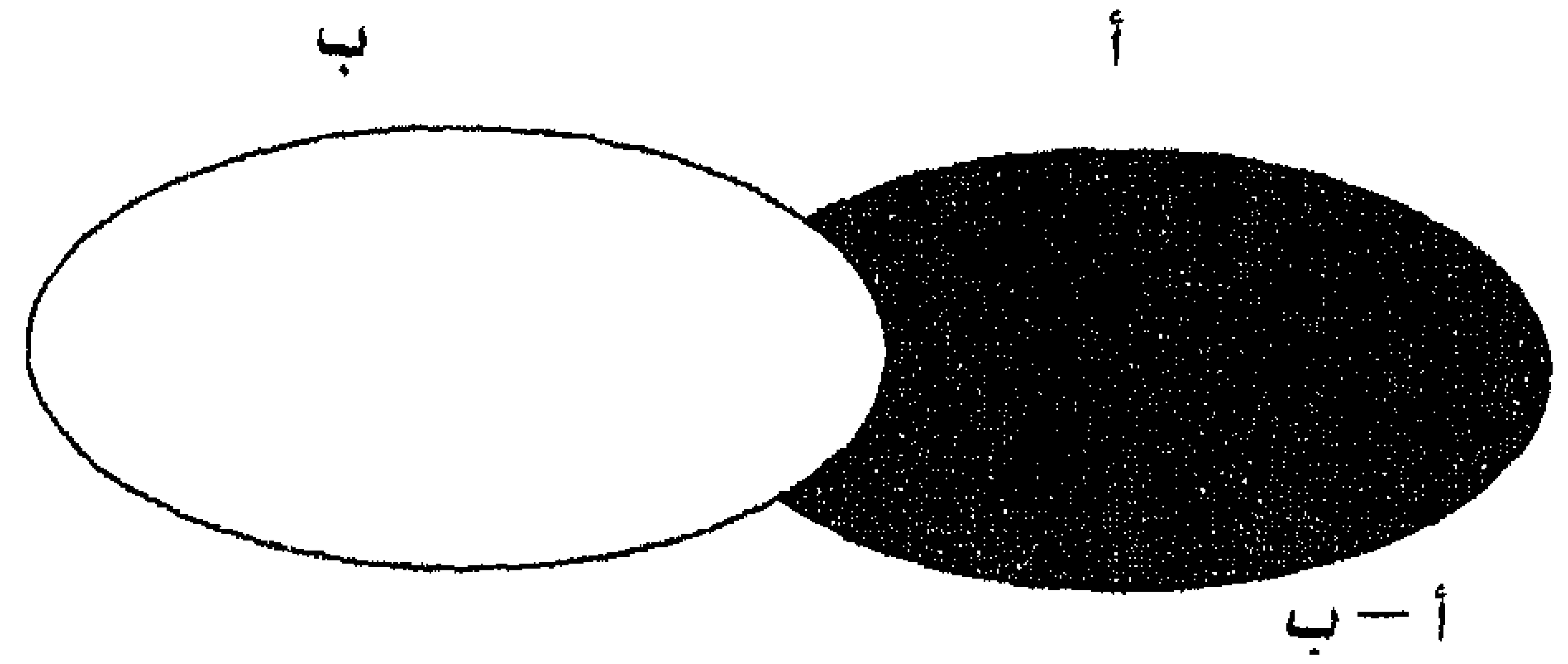
فإن أ – ب = { مسطرة ، فرجار }

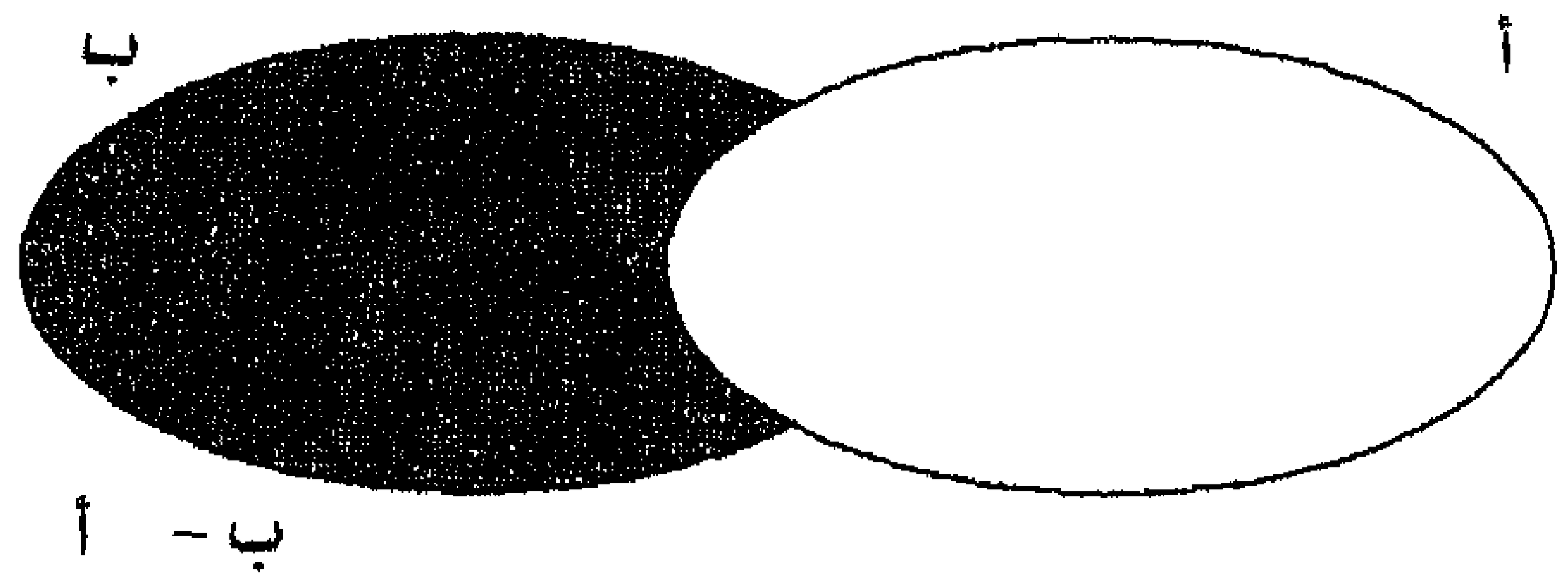
وأن ب – أ = { مبراة }

وعليه فإن أ – ب $\neq$ ب – أ بوجه عام

بينما ن (أ – ب) = ن (أ) - ن (أ $\cap$ ب) دائماً .

ويوضح الشكل الآتي مفهوم الفرق بين مجموعتين (العزل) من خلال أشكال فن:





وإذا كانت أ مجموعة جزئية من المجموعة ب، كأن تكون

أ = { 6، 10، 20، 60 } ، ب = { 6، 10، 20 }

فإن أ – ب = { 60 } ، بينما ب – أ = Φ

وحيث أن ن (أ) = 4 ، ن (ب) = 3 ، ن (أ – ب) = 1

فإن ن (أ – ب) = ن (أ) - ن (ب) لأن ب ⊃ أ.

وفيما يلي توضيح لعزل المجموعات من خلال جدول الانتماء:

جدول الانتماء لعملية العزل

أ	ب	أ - ب
∈	∈	∉
∈	∉	∈
∉	∈	∉
∉	∉	∉

أي أن العنصر ينتمي إلى أ − ب في حالة واحدة فقط هي انتماؤه إلى أ فقط، أي أنه عنصر في أ لكن غير مشترك بين أ، ب.

ويمكن أن نلاحظ أن:

$\overline{\text{أ}}$ = ش − أ، وبذلك يكون التتام حالة خاصة من عزل المجموعات.

وكمثال على ذلك :

إذا كانت ش = { س: س أحد أرقام النظام العددي العشري} ،

وكانت أ = { 0 ، 2 ، 4 ، 6 ، 8 }

فإن $\overline{\text{أ}}$ = { 1 ، 3 ، 5 ، 7 ، 9 }

خصائص عملية العزل :

تحقق عملية العزل (الفرق بين مجموعتين) الخصائص الآتية:

1. أ − $\overline{\text{أ}}$ = Φ
2. ش − أ = $\overline{\text{أ}}$
3. أ − ش = Φ
4. أ − Φ = أ
5. Φ − أ = Φ
6. أ − ب = أ $\cap$ $\overline{\text{ب}}$

مثال توضيحي:

إذا كانت ش = { 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 ، 9 }، وكانت

أ = { 1 ، 2 ، 3 ، 4 } ، ب = {3 ، 5 ، 7 } ، فإن :

1. أ – $\overline{\text{أ}}$ = { 1 ، 2 ، 3 ، 4 } – { 1 ، 2 ، 3 ، 4 } = Φ

أي أن أ – أ = $\overline{\text{أ}}$ Φ

2. ش – أ = { 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9} – { 1، 2، 3، 4} = {5، 6، 7، 8 ، 9 }

= $\overline{\text{أ}}$

أي أن ش – أ = $\overline{\text{أ}}$

3. أ – ش = { 1 ، 2 ، 3 ، 4 } – { 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 ، 9 } = Φ

أي أن أ – ش = Φ

4. أ – Φ = { 1 ، 2 ، 3 ، 4 } – { } = { 1 ، 2 ، 3 ، 4 } = أ

أي أن أ – Φ = أ

5. Φ – أ = { } – { 1 ، 2 ، 3 ، 4 } = { } = Φ

أي أن Φ – أ = Φ

6. أ – ب = { 1 ، 2 ، 3 ، 4 } – {3 ، 5 ، 7 } = { 1 ، 2 ، 4 }

أ ∩ $\overline{\text{ب}}$ = { 1 ، 2 ، 3 ، 4 } ∩ { 1 ، 2 ، 4 ، 6 ، 8 ، 9 } = { 1 ، 2 ، 4 }

أي أن أ – ب = أ ∩ $\overline{\text{ب}}$

(3.3) العلاقات وأنواعها:

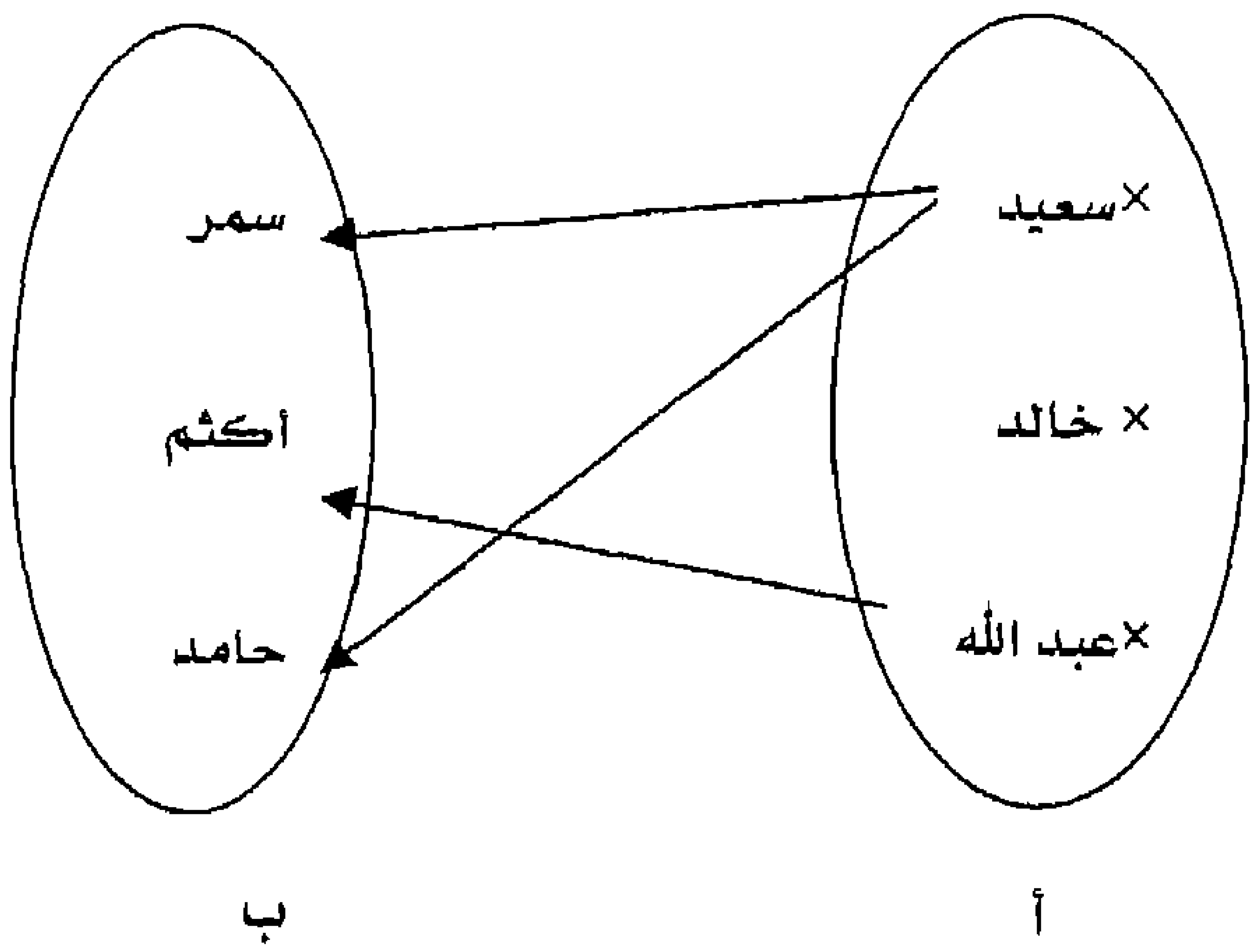
عندما يقال أحمد أخ لخوله فإن العلاقة التي تربط بينهما هي علاقة "الأخ"، وعندما يقال مادبا والزرقاء مدينتان أردنيتان فإن العلاقة التي تربطهما هي علاقة "من القطر نفسه".

وعندما يقال 4 أصغر من 9 فإن العلاقة بين هذين العددين هي علاقة ترتيبيه من نوع "أصغر من".

والعلاقة عادة ما تكون بين مجموعتين، فإذا كانت:

أ = { سعيد، خالد، عبدالله}، ب = { سمر، أكثم، حامد}

وكانت العلاقة هي علاقة "أب" ممثلة كالآتي:



فإن هذا الشكل يدلنا على أن سعيد أب لكل من سمر وحامد، وعبد الله أب لأكثم.

ويمكن كتابة ذلك على شكل مجموعة من الأزواج المرتبة هي:

(سعيد، سمر) ، (سعيد، حامد) ، (عبد الله، أكثم).

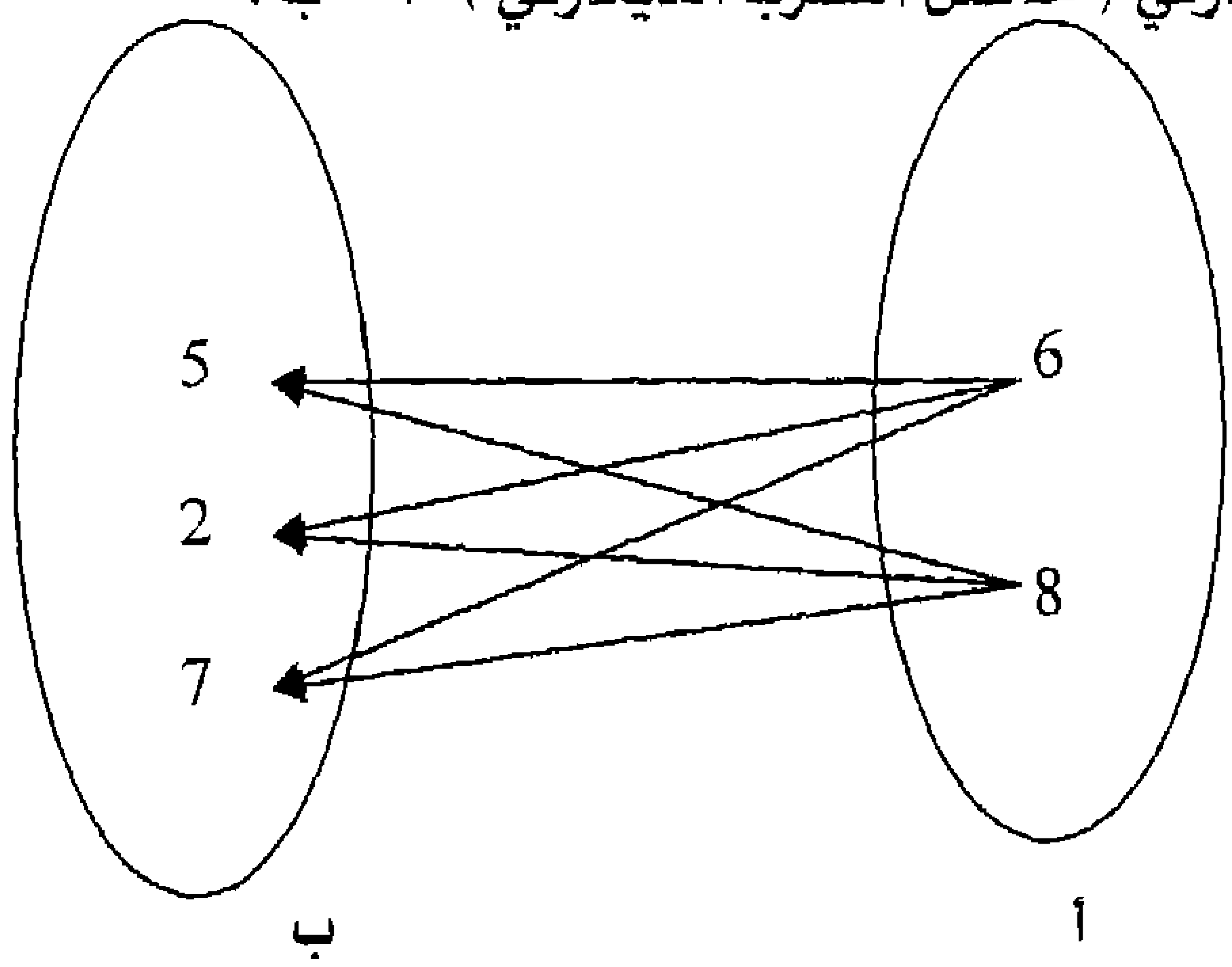
وبوضع هذه الأزواج بين حاصرتي المجموعة وتسمية هذه العلاقة بـ ع فإن:

ع = { (سعيد ، سمر) ، (سعيد ، حامد) ، (عبد الله ، أكثم) }

وعندها فإن (سعيد ، حامد) ∋ ع مثلاً ، بينما (خالد ، سمر) ∌ ع ،

والعلاقة عادة ما تكون مجموعة جزئية من حاصل ضرب (جداء) ديكارتي نسبة لعالم الرياضيات (ديكارت) ، فما المقصود بذلك ؟

لتكن أ = { 6 ، 8 } ، ب = { 5 ، 2 ، 7 } ، فإن الشكل الآتي يوضح الجداء الديكارتي (حاصل الضرب الديكارتي) أ × ب :



أي أن أ × ب = { (6 ، 5) ، (6 ، 2) ، (6 ، 7) ، (8 ، 5) ، (8 ، 2) ، (8 ، 7) } ، والذي يمكن تمثيله بيانياً في المستوى البياني أيضاً.

وبشكل عام أ × ب = { (س ، ص) : س ∋ أ ، ص ∋ ب } .

ويمكن الحصول على علاقة ما من هذا الجداء، ولتكن علاقة " > " كالآتي:

ع1 = { (6 ، 5) ، (6 ، 2) ، (8 ، 5) ، (8 ، 2) ، (8 ، 7) }

لاحظ أن $ع_1 \subset$ أ × ب .

كذلك العلاقة " > " ولنرمز لها بالرمز $ع_2$ ، عندها:

$ع_2$ = { (6 ، 7) } فقط ، وإن $ع_2 \subset$ أ × ب أيضاً.

أما العلاقة " = " في هذا المثال ، ولتكن $ع_3$ فإن :

$ع_3$ = { } ، أي لا يوجد عناصر متساوية في هاتين المجموعتين .

تدريب: تحقق من أن:

1- ن (أ × ب) = ن (أ) × ن (ب)
2- أ × ب $\neq$ ب × أ
3-ن (أ × ب) = ن (ب × أ)

(1.3.3) أنواع العلاقات:

إن العلاقات أنواع، فمنها العلاقة الانعكاسية ومنها العلاقة التماثلية ومنها العلاقة المتعدية، وفيما يلي توضيح لذلك:

لتكن ع علاقة على أ، أي ان ع $\subseteq$ أ × أ فإن:

- ع علاقة انعكاس إذا وإذا فقط كان (س، س) $\in$ ع ، لأي س $\in$ أ
- ع علاقة تماثل إذا وإذا فقط (س ، ص) $\in$ ع فإن (ص ، س) $\in$ع ، لأي س ، ص $\in$ أ .
- ع علاقة تعدي إذا وإذا فقط (س ، ص) $\in$ع ، (ص ، ل) $\in$ ع فإن (س ، ل) $\in$ ع ، لأي س ، ص ، ل $\in$ أ.

والمثال التالي يوضح ذلك:

لتكن أ = { 2 ، 5 ، 8 } ، ع العلاقة "≥" فإن:

ع = { (2 ، 2) ، (2 ، 5) ، (2 ، 8) ، (5 ، 5) ، (5 ، 8) ، (8 ، 8) } .

❖ إن هذه العلاقة انعكاسية لأن كل عنصر ينتمي إلى أ قد ارتبط بنفسه، مثل:

(2 ، 2) ∈ ع وهكذا ....

❖ لكن هذه العلاقة ليست تماثلية لأن :

(2 ، 5) ∈ ع مثلاً ، بينما (5 ، 2) ∉ ع .

❖ ومع ذلك فهي علاقة متعدية، حيث أن (2 ، 5)∈ع، (5، 8) ∈ع ⇐ (2، 8) ∈ ع ،
وذلك متحقق على أي زوجين مركبين في ع لجميع عناصر أ .

وكمثال آخر:

إذا كانت ب = { 1 ، 2 ، 3 } ، وكانت ع علاقة التساوي،

فإن ع = { (1 ، 1) ، (2 ، 2) ، (3 ، 3) }.

ويمكنك أن تتحقق أن هذه العلاقة انعكاسية وتماثلية؛ أما فيما يخص التعدي فإنه لا يوجد أي مثال يتعارض مع ذلك، وعليه فإنها علاقة متعدية أيضاً .

والعلاقة التي تكون انعكاسية وتماثلية ومتعدية تسّمى علاقة تكافؤ.

أي أن:

❖ع علاقة تكافؤ إذا وإذا فقط كانت ع علاقة انعكاسية وتماثلية ومتعدية على مجموعة ما.

(4.3) الاقترانات وأنواعها:

الاقتران نوع من العلاقات ضمن شروط محددة، ولذا، فالاقتران مجموعة جزئية من حاصل ضرب ديكارتي أيضاً ، لكن ضمن شروط محددة، فما هذه الشروط؟

إذا كانت أ مجموعة ما، ب مجموعة أخرى، ق مختصر لكلمة اقتران فإن:

ق : أ ⟵ ب اقتران إذا وإذا فقط كان لكل س ∋ أ يوجد ص واحدة ∋ ب بحيث أن ص = ق (س).

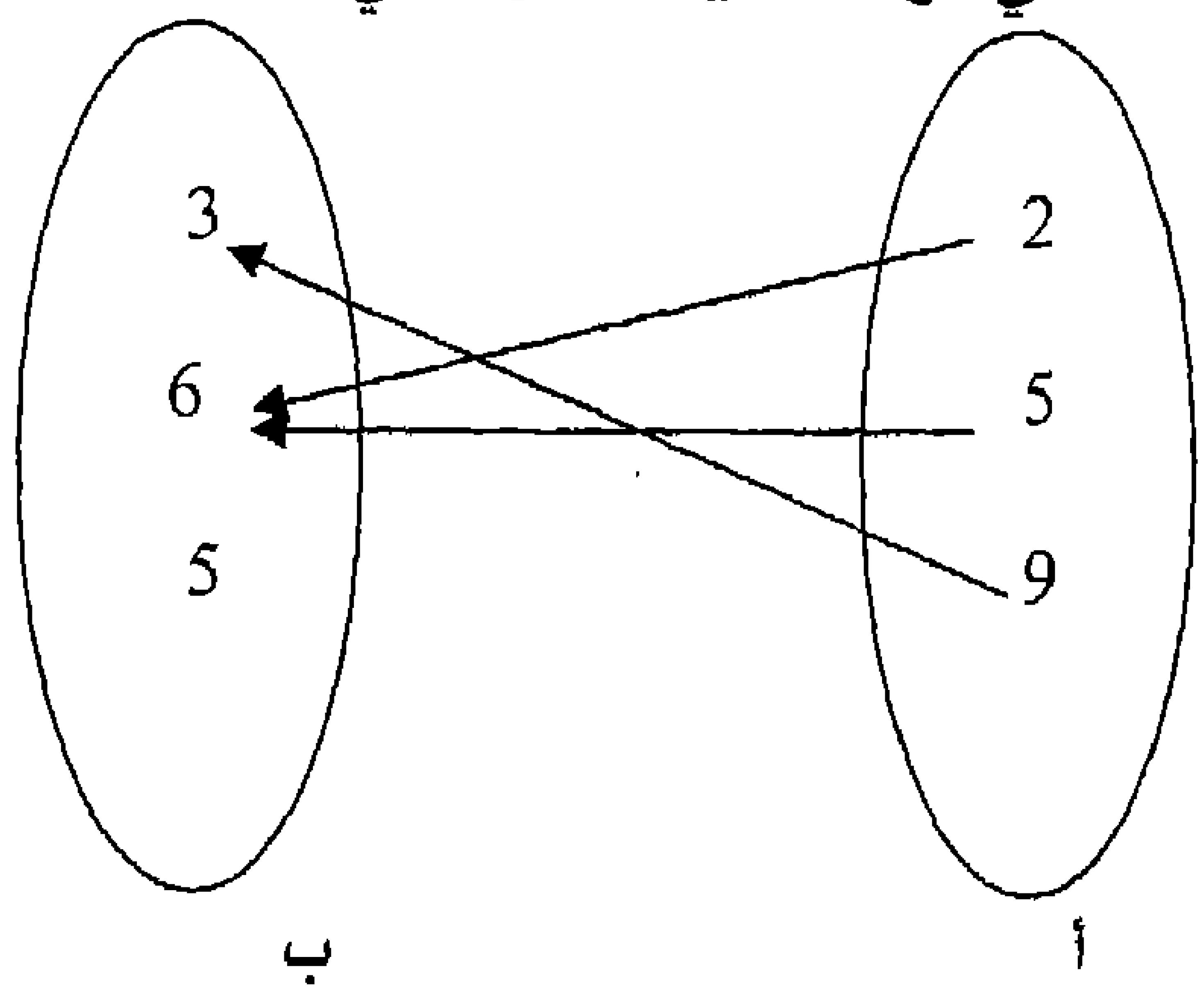
لاحظ أن السهم الوارد في الأشكال أدناه لا علاقة له بالأداة الشرطية وإنما للدلالة على أن المساقط الأولى في الأزواج المرتبة من عناصر المجموعة أ، والمساقط الثانية من الأزواج المرتبة من عناصر المجموعة ب، وعليه فإن:

ق= {(س،ص): س ∋ أ، ص∋ب، لكل س يوجد ص واحدة: ص = ق (س) } .

وتسمى المجموعة أ مجال الاقتران ، وأما المجموعة ب فتسمى المجال المقابل للاقتران.

مثال (1):

إذا كانت أ = { 2 ، 5 ، 9 } ، ب = { 3 ، 6 ، 5 } وكانت العلاقة بين هاتين المجموعتين كما هي موضحة في الشكل الآتي :

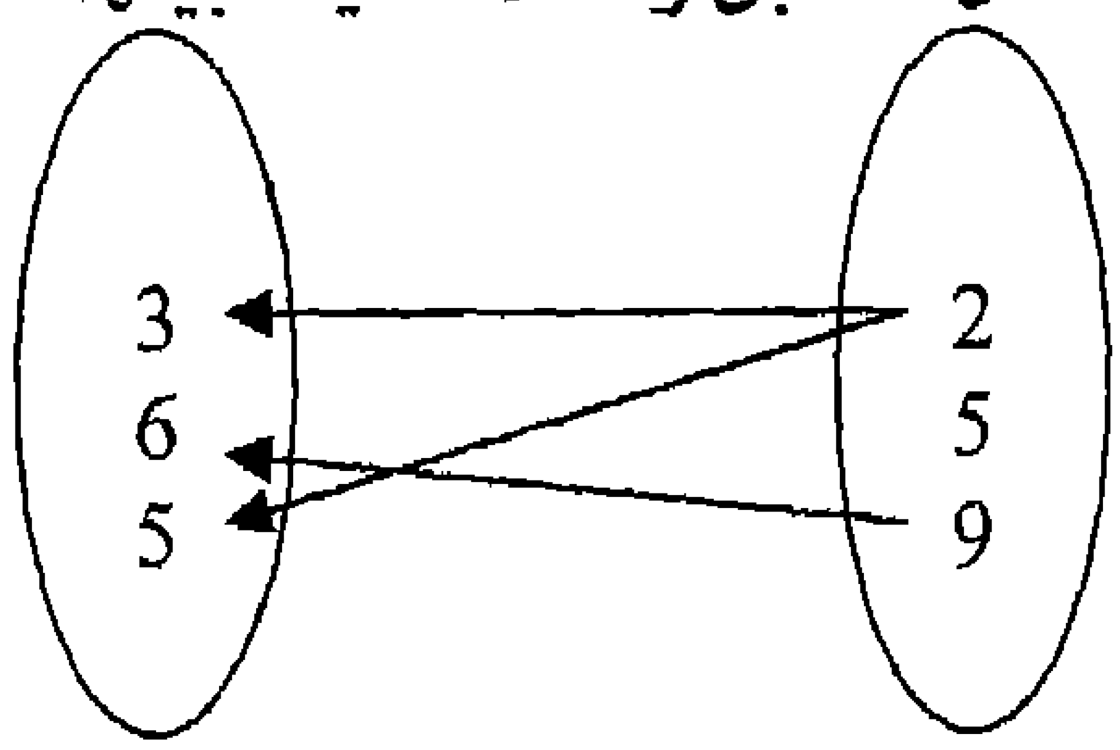


فإن ق = {(2 ، 6) ، (5 ، 6) ، (9 ، 3) } ومن الواضح أن هذه العلاقة اقتراناً لأن:

1. جميع عناصر المجموعة أ ارتبطت بعناصر في المجموعة ب.
2. لم يرتبط أي عنصر في المجموعة أ بأكثر من عنصر واحد في ب.

مثال (2):

إذا كانت أ ، ب كما في المثال السابق والعلاقة فيما بينهما كما في الشكل:



فإن هذه العلاقة ليست اقتراناً للسببين التاليين:

1. لم يرتبط العنصر 5 ∋ أ بأي عنصر في ب.
2. ارتبط العنصر 2∋أ بعنصرين في ب.

ومن الجدير ذكره أن أحد هذين السببين كافٍ لانتفاء صفة الاقتران على هذه العلاقة.

(1.4.3) أنواع الاقترانات :

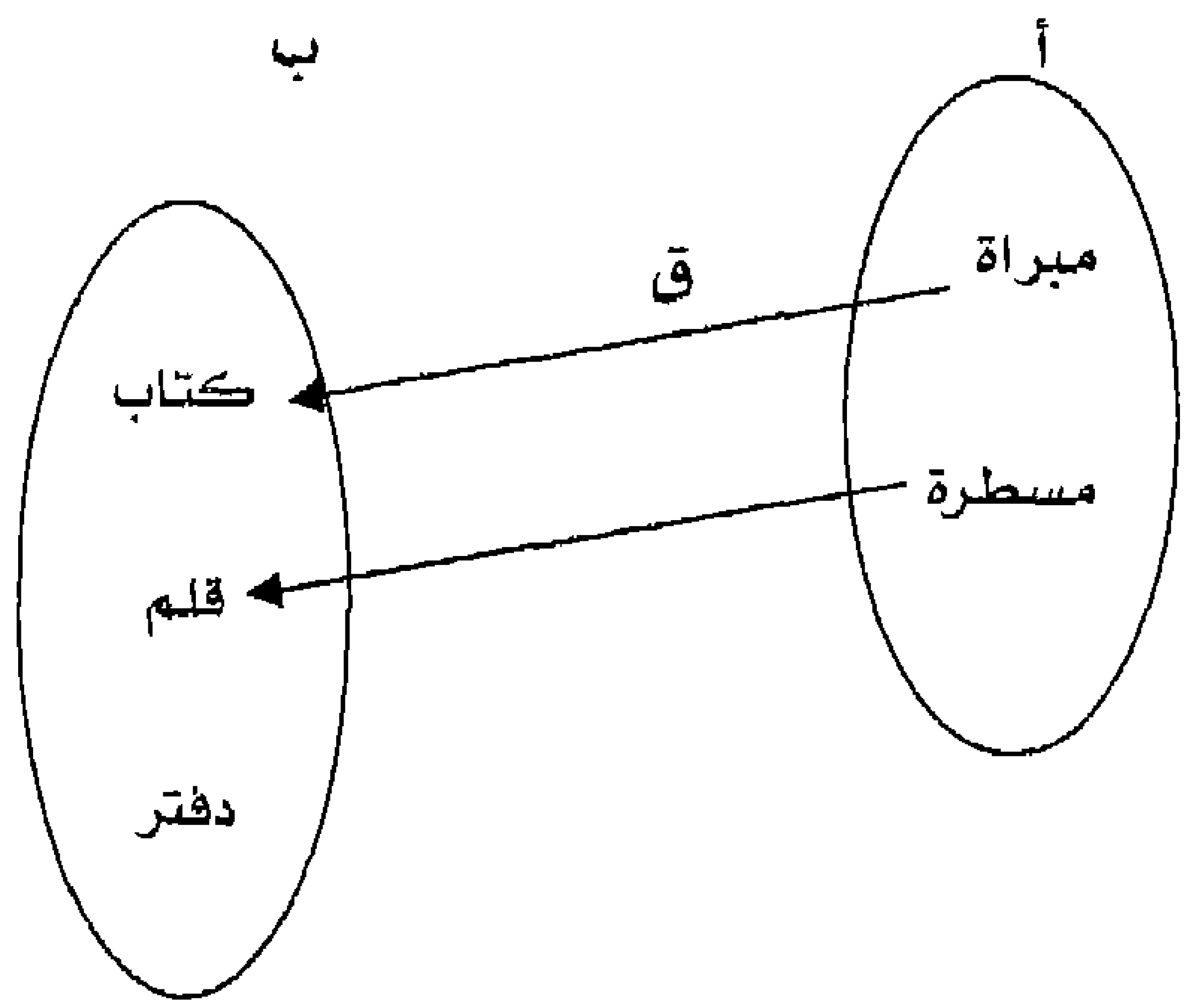
والاقترانات أنواع فمنها المتباين، ومنها الشامل، ومنها المتناظر، ويتضح ذلك كالآتي:

❖ ق : أ ⟵ ب اقتران متباين إذا وإذا فقط كان لكل $س_1$ ، $س_2$ ∈ أ، $س_1 \neq س_2$ فإن ق ($س_1$) ≠ ق ($س_2$).

مثال (1):

إذا كانت أ = { مبراة ، مسطرة } ب = { كتاب ، دفتر ، قلم }

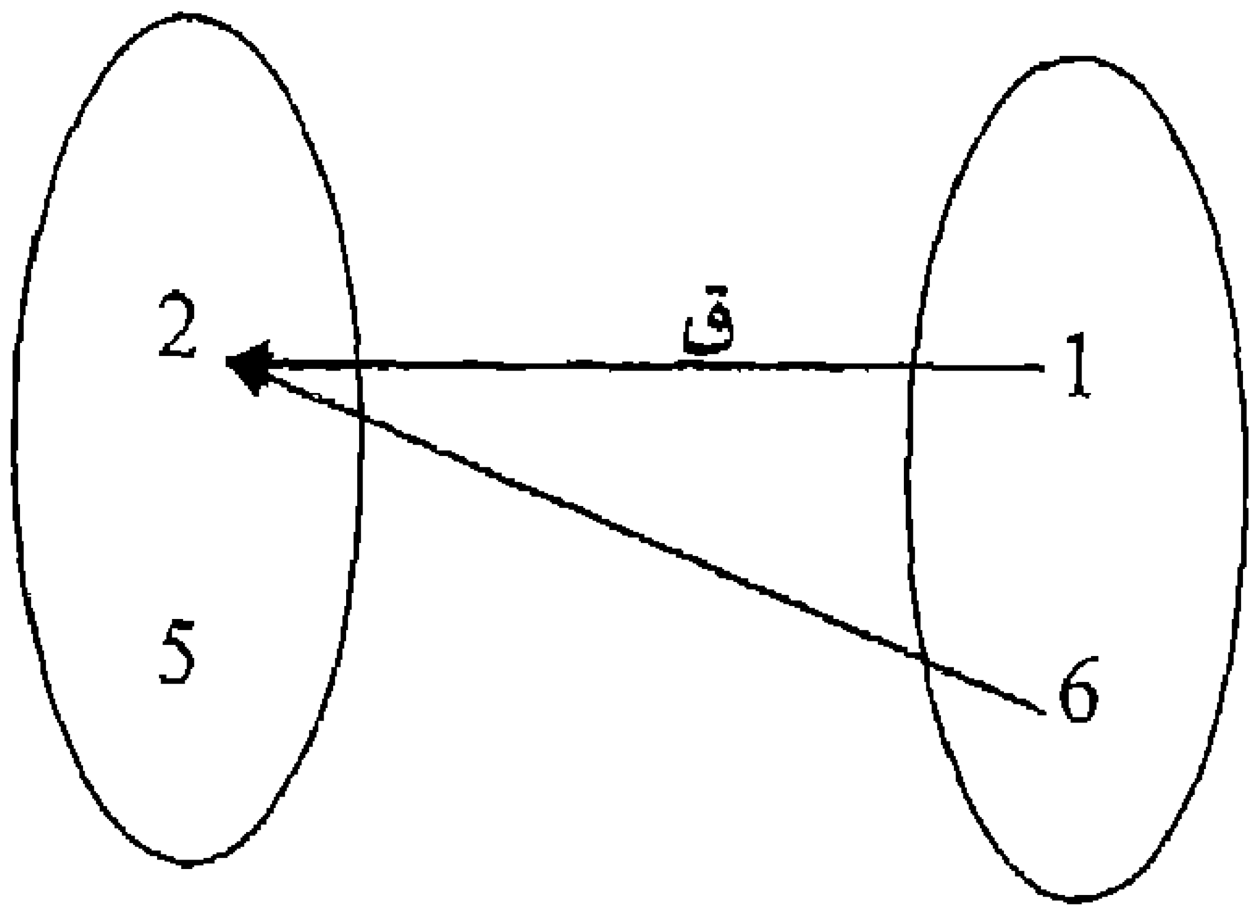
والعلاقة بينهما كما في الشكل :



لاحظ أن مبراة ≠ مسطرة ⇐ ق (مبراة) ≠ ق (مسطرة) ، إذن ق اقتران متباين.

مثال (2):

إذا كانت أ = { 1 ، 6 } ، ب = { 2 ، 5 } ، والعلاقة بينهما كما في الشكل :



فإن ق غير متباين لأن $1 \neq 6$ لكن ق (1) = ق (6)

كما أن هذا الاقتران غير شامل، فما المقصود بالاقتران الشامل؟

❖ ق : أ ⟵ ب اقتران شامل إذا وإذا فقط كان لكل ص ∈ ب يوجد س ∈ أ بحيث أن ص = ق (س) .

وعليه فإن الاقتران الوارد في المثال السابق غير شامل لأن العنصر 5 ∈ ب لم يرتبط بأي عنصر في المجموعة أ.

وحيث سميت المجموعة أ بمجموعة المجال، والمجموعة ب بمجموعة المجال المقابل، فإن المجموعة حـ = { ص : ص = ق (س)} هي مجموعة المدى ، ومن الواضح أن حـ ⊆ ب.

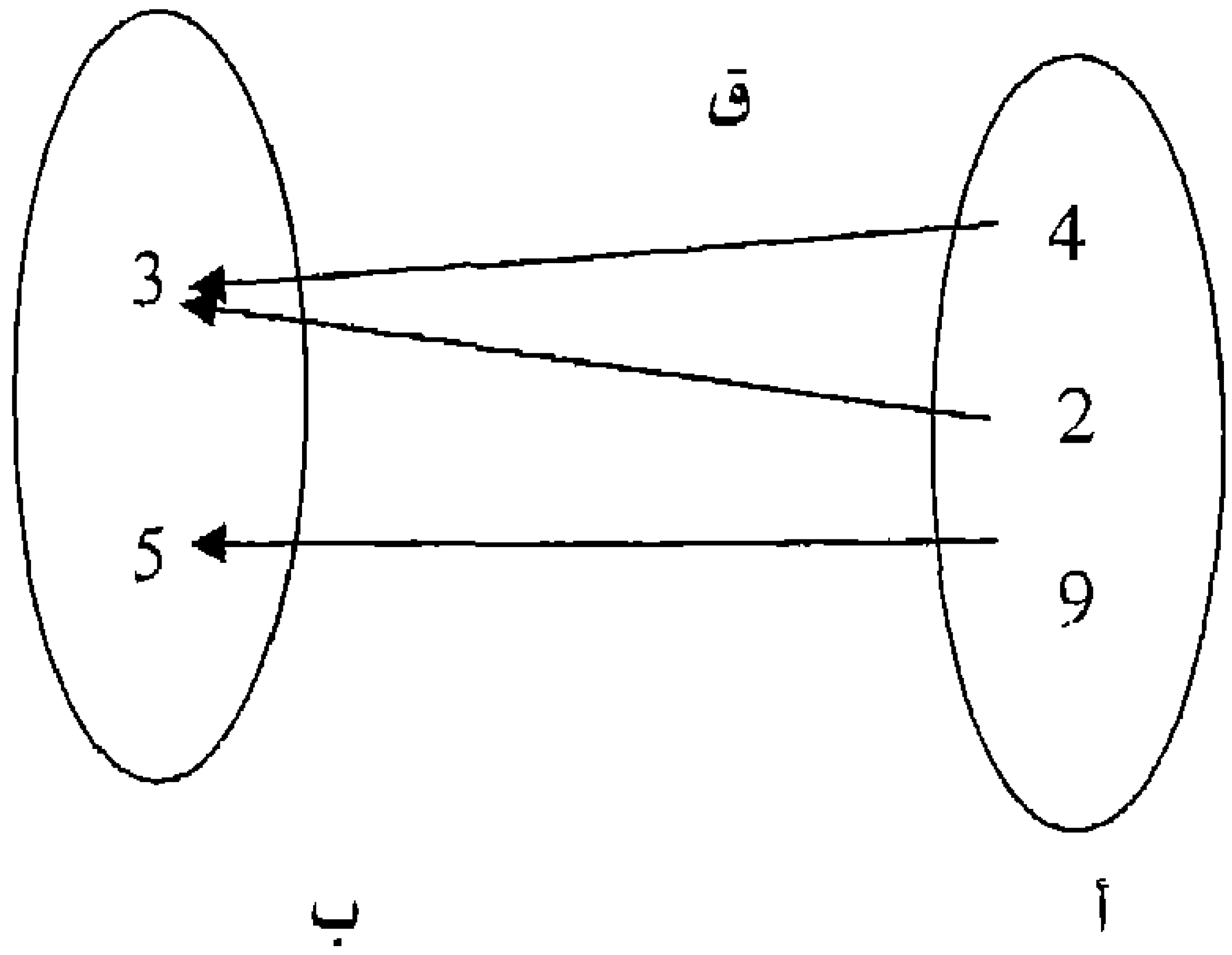
وعليه نقول بأن الاقتران شامل إذا وإذا فقط كان مداه = مجاله المقابل، أي يجب أن يتحقق الآتي ليكون الاقتران شاملاً:

1. ق اقتران
2. حـ = ب

مثال :

إذا كانت أ = { 4 ، 2 ، 9 } ب = { 3 ، 5 }

وكان ق كما هو موضح في الشكل :



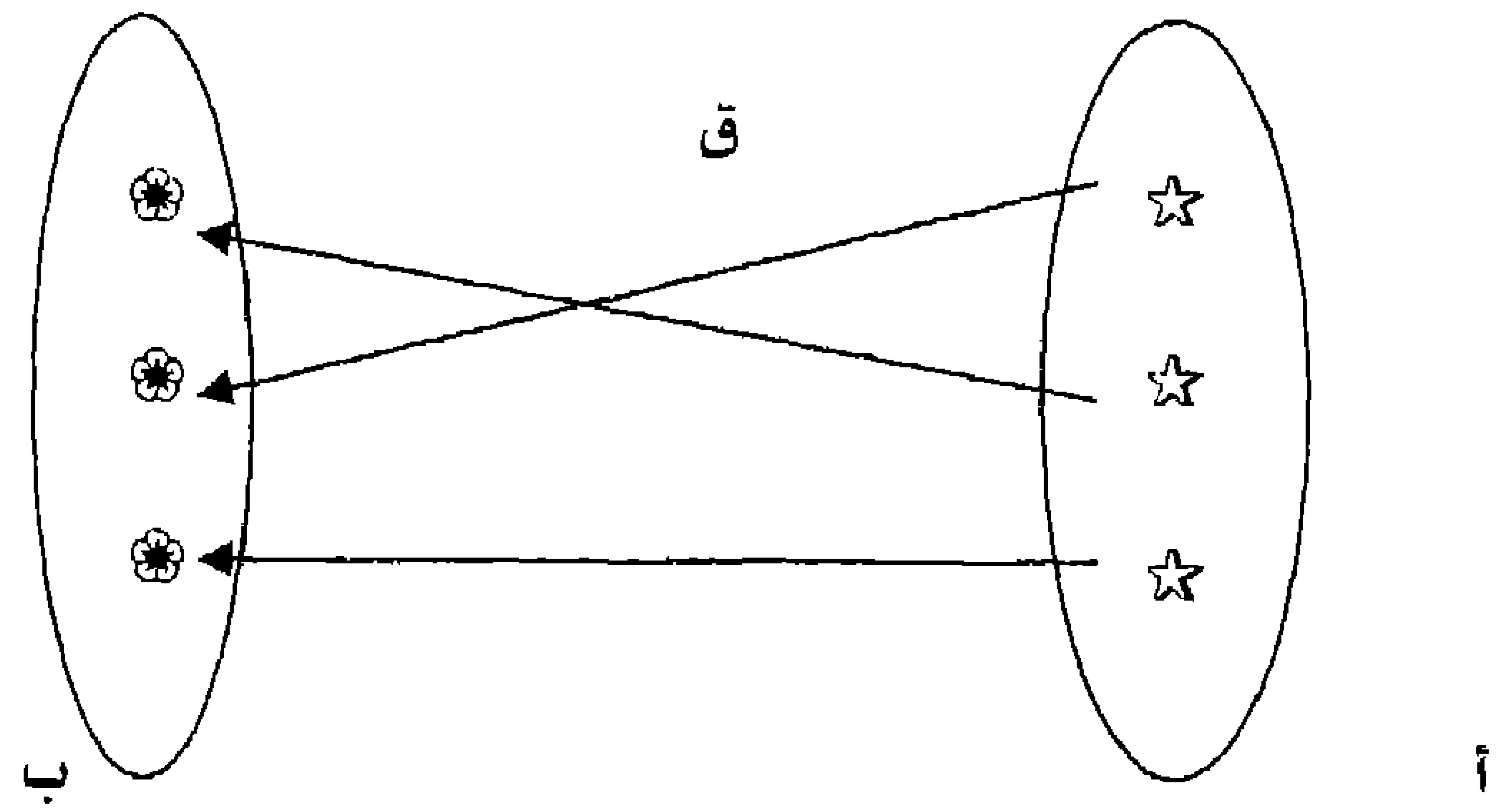
فإن هذا الاقتران شامل، لماذا ؟ لكنه غير متباين، لماذا ؟

وحتى يكون الاقتران اقتران تناظر ينبغي أن يكون متبايناً وشاملاً أي أن ق اقتران تناظر إذا وإذا فقط كان ق متبايناً وشاملاً .

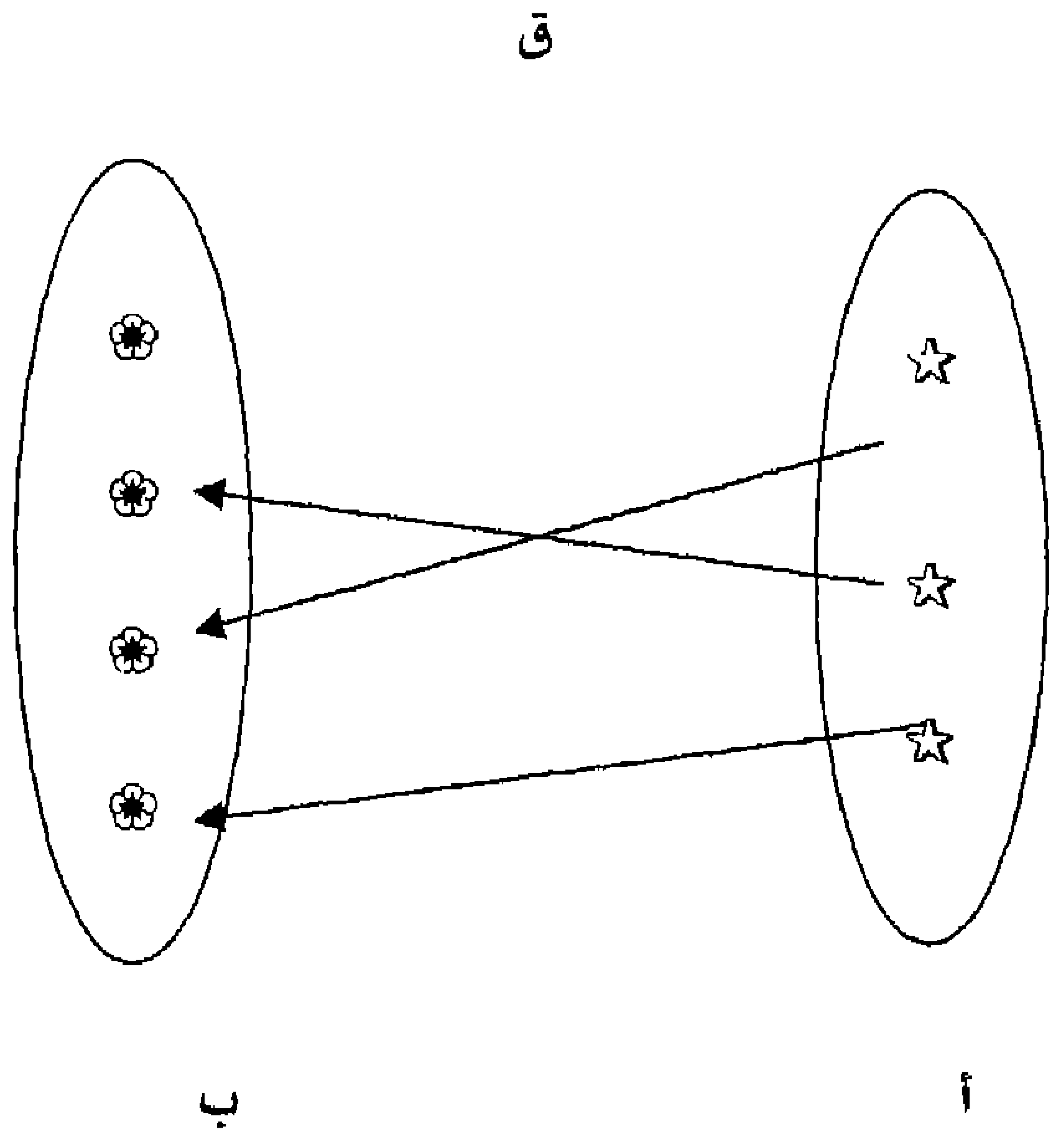
وبصورة رياضية:

❖ ق : أ ⟵ ب اقتران تناظر إذا وإذا فقط كان لكل ص ∈ ب يوجد س واحدة فقط ∈ أ بحيث أن ص = ق (س) .

والرسم التالي يوضح اقتران تناظر نظراً لارتباط جميع عناصر المجال المقابل بعناصر المجال واحداً لواحد(one – to – one correspondence).



بينما الرسم التالي ليس مثالاً على اقتران التناظر ، إذ بقي عنصر في المجموعة ب غير مرتبط بعنصر في المجموعة أ .



ويتضح من الشكل السابق أن هذا الاقتران متباين ، لكنه غير شامل ، ولذلك فهو ليس اقتران تناظر.

(5.3) العمليات الثنائية وخواصها:

العملية الثنائية علاقة، بل إنها اقتران مجاله مجموعة من الأزواج المرتبة ومجاله المقابل مجموعة ما، أما مداه فنتاج العملية على عنصري الزوج المرتب في المجال، وكتعريف:

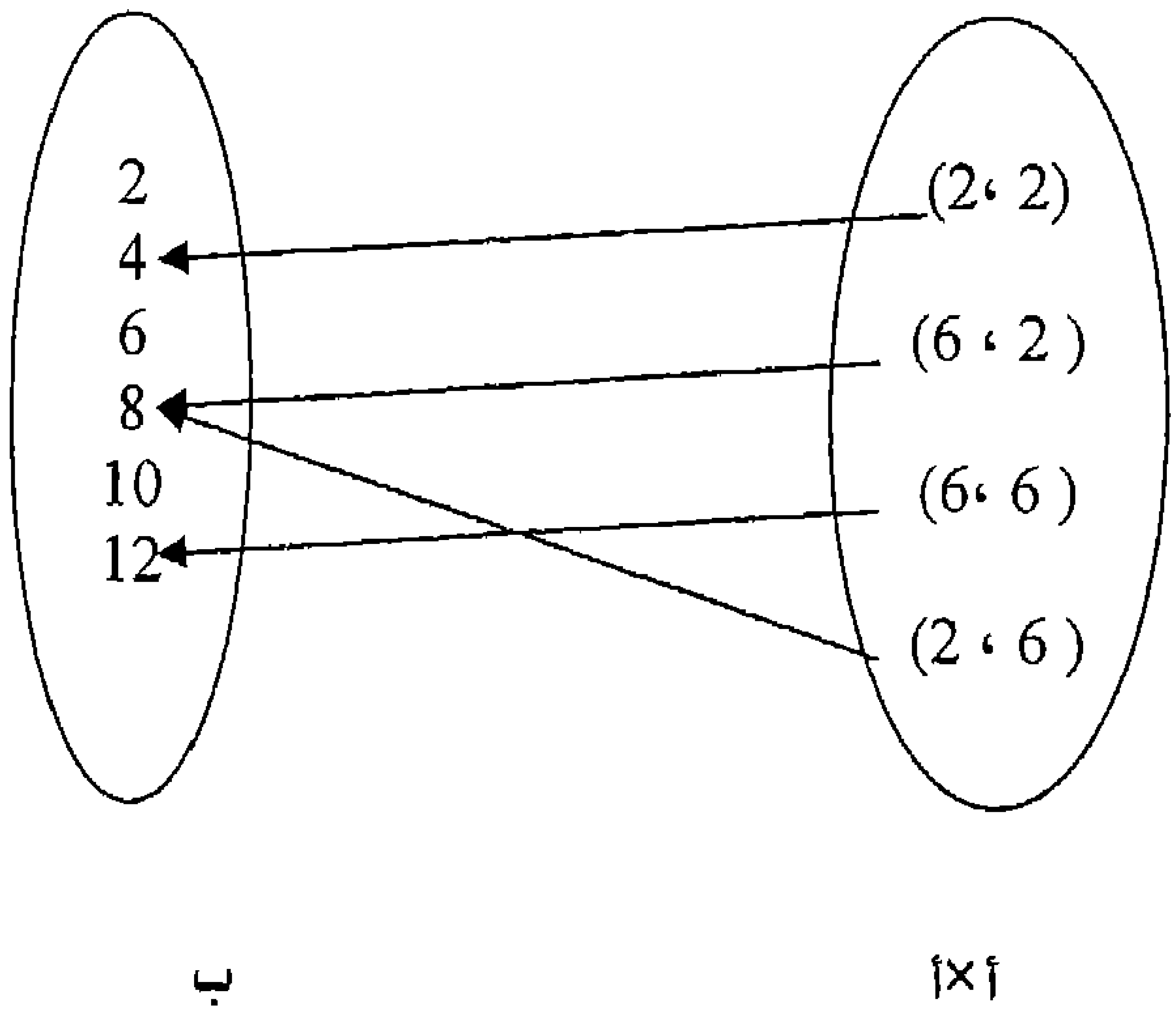
(أ، ✼) عملية ثنائية إذا وإذا فقط كان هنالك اقتران ✼ : أ × أ ⟵ ب،

حيث ✼ (س، ص) = س ✼ ص .

مثال :

إذا كانت أ = { 2 ، 6 } ، ب = { 2 ، 4 ، 6 ، 8 ، 10 ، 12 }،

وكانت (أ، +) هي العملية الثنائية، فإن اقتران هذه العملية يتضح من الشكل الآتي:



لاحظ أن : (2 ،2) ⟵ 2 + 2 = 4

(2،6) ⟵ 2 + 6 = 8

$$12 = 6 + 6 \longleftarrow (6 ، 6)$$

$$8 = 2 + 6 \longleftarrow (2 ، 6)$$

ومن الواضح أن هذه العلاقة اقتران لارتباط جميع عناصر المجال بعناصر في المجال المقابل ، وعدم ارتباط أي عنصر من عناصر المجال بأكثر من عنصر واحد في المجال المقابل.

ومن الجدير ذكره أن تسمية (أ ، ❖) بالعملية الثنائية تعود إلى هذا الزوج المرتب المكون من المجموعة أ والعملية ❖، على أن يتحقق على هذا الزوج المرتب تعريف العملية الثنائية الوارد سابقاً.

(1.5.3) خواص العملية الثنائية:

وللعملية الثنائية خواص عديدة كالإغلاق والتجميع والتبديل والمحايد والنظير، وفيما يلي توضيح لذلك:

1. (أ، ❖) تحقق خاصية الإغلاق إذا وإذا فقط كان س ❖ ص ∈ أ

   ∀ س ، ص ∈ أ .

2. (أ ، ❖) تحقق الخاصية التجميعية إذ وإذا فقط كان (س ❖ ص) ❖ ع = س ❖ (ص ❖ ع) ∀ س ، ص ، ع ∈ أ .
3. (أ ، ❖) تحقق خاصية التبديل إذا وإذا فقط كان س ❖ ص = ص ❖ س

   ∀ س ، ص ∈ أ .

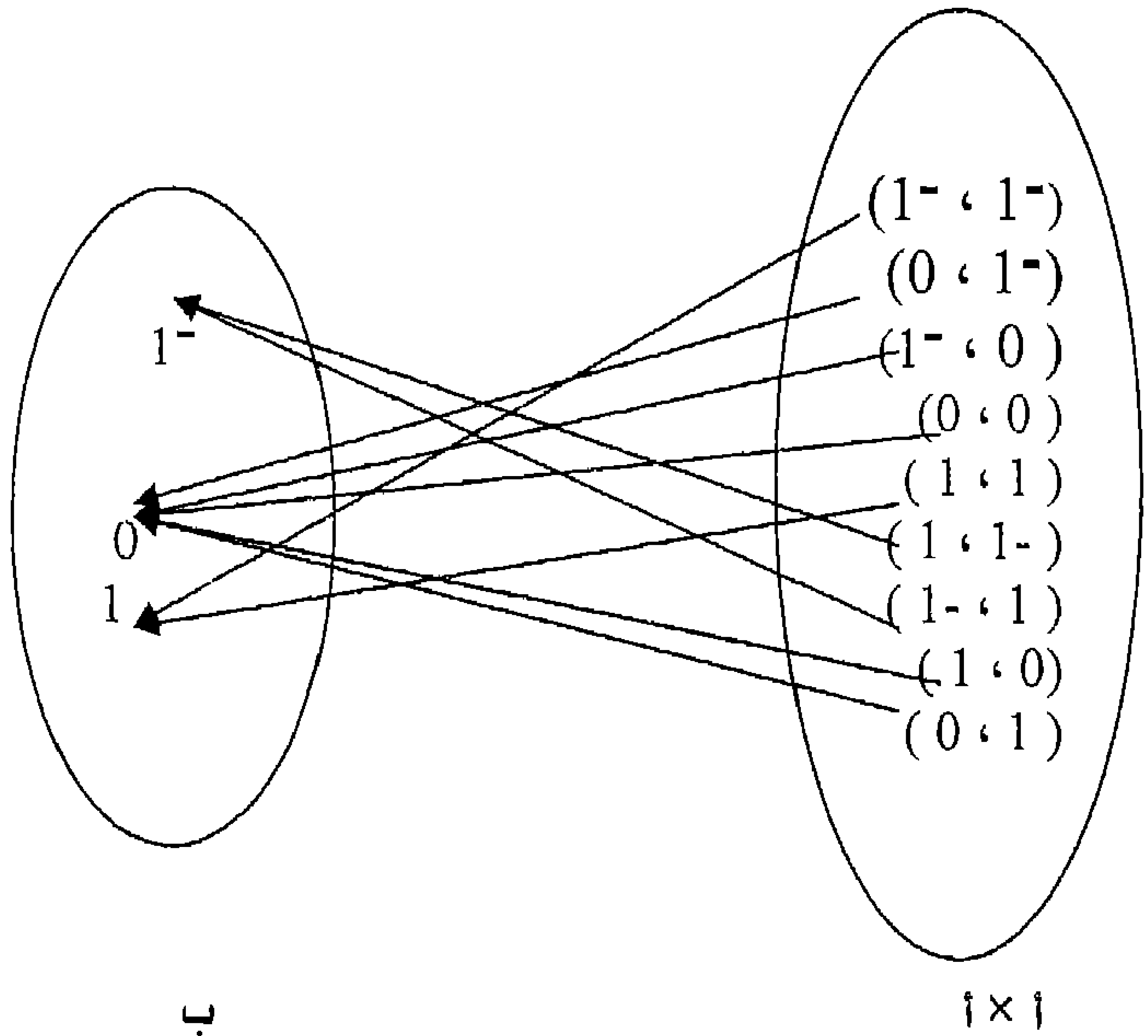
4. (أ ، ❖) تحقق خاصية المحايد إذا وإذا فقط وجد هـ ∈ أ بحيث أن هـ ❖ س = س ❖ هـ = س ، ∀ س ∈ أ .

5. (أ ، ❖) تحقق خاصية النظير إذا وإذا فقط كان ∀ س ∋ أ E س َ ∋ أ بحيث أن س ❖ سَ = سَ ❖ س = هـ ، حيث هـ هو العنصر المحايد.

مثال :

لتكن أ = { ⁻1 ، 0 ، 1 } ، ب = { ⁻1 ، 0 ، 1 }

والعملية الثنائية هي (أ ، ×) ، فإنه يمكن توضيح هذه العملية كالآتي:



فمثلاً × (⁻1 ، ⁻1) = ⁻1 × ⁻1 = 1

× (0 ، ⁻1) = ⁻1 × 0 = 0

× (⁻1 ، 0) = 0 × ⁻1 = 0

× (0 ، 0) = 0 × 0 = 0

ومن حيث خواص هذه العملية الثنائية في هذا المثال فهي كالآتي:

1. (أ ، ×) تحقق خاصية الإغلاق لأن س × ص $\in$ أ ، $\forall$ س ، ص $\in$ أ.

فمثلاً:

× (0 ، $^-1$) = 0 × $^-1$ = 0 $\in$ أ .

وجدير بالذكر أنه إذا كانت ❖ : أ × أ ← أ فإن (أ ، ❖) مغلقة دائماً لأن المجال المقابل (ب) هو المجموعة أ .

2. (أ ، ×) تحقق الخاصية التجميعية لأن (س × ص) × ع = س × (ص × ع)
$\forall$ س ، ص ، ع $\in$ أ .

فمثلاً:

س = $^-1$ ، ص = 0 ، ع = $^-1$ فإن ($^-1$ × 0) × $^-1$ = $^-1$ × (0 × $^-1$) × $^-1$ = (0 × $^-1$)
حيث قيمة كل من الطرفين = صفر .

3. (أ ، ×) تحقق الخاصية التبديلية ، لأن س × ص = ص × س

$\forall$ س ، ص $\in$ أ .

وكتوضيح:

$^-1$ × 0 = 0 × $^-1$ = 0 ، وهكذا ....

4. (أ، ×) تحقق خاصية المحايد، وهو العدد 1، حيث أن (1 × س= س × 1 = س)،
$\forall$ س $\in$ أ

5. (أ ، ×)لا تحقق خاصية النظير ، لأنه لا يوجد للعدد (0) نظير يحقق أن 0 × نظيره = 1 .

وكثيراً ما نتحدث عن خاصية أخرى غير ما ذكر ، ويطلق على هذه الخاصية بخاصية التوزيع ، لكن هذه الخاصية تحتاج إلى ثلاثي مرتب يتكون من مجموعة ما أ وعمليتين على هذه المجموعة ∗، ∗َ مثلاً.

وكتعريف:

(أ ، ∗ ، ∗َ) تحقق خاصية التوزيع إذا وإذا فقط كان

س ∗َ (ص ∗ ع) = (س ∗َ ص) ∗ (س ∗َ ع)

(ص ∗ ع) ∗َ س = (ص ∗َ س) ∗ (ع ∗َ س)

$\forall$ س ، ص ، ع $\in$ أ

أي أن ∗َ تتوزع على ∗ من اليمين ومن اليسار .

مثال:

لتكن أ = {1، 2، 3، 4 ، 5 } ولتكن ب = { 1 ، 2 ، 3 ، .... ، 50 }

ولنفرض أن العملية الثلاثية هي (أ ، × ، +) ، فإن:

$4 \times (2 + 5) = (4 \times 2) + (4 \times 5)$

$(2 + 5) \times 4 = (2 \times 4) + (5 \times 4)$

وإذا ما اخترنا أي مثال آخر سنجد أن الطرفين متساويان ،إذن فالضرب يتوزع على الجمع .

(6.3) تمارين ونشاطات:

1. ضع إشارة (×) على رمز الإجابة الصحيحة في كل مما يلي :

1. إذا كان أ $\cup$ ب = أ فإن أ $\cap$ ب يساوي

أ) أ

ب) ب

ج) Φ

د) ب – أ

2. إذا كانت أ = { 2 ، 3 ، 6 } فإن عدد مجموعاتها الجزئية يساوي :

أ) 3

ب) 6

ج) 8

د) 9

3. إذا كانت ش = {س: س عدد فردي أقل من 10}، أ = { 1، 3} فإن أَ تساوي:

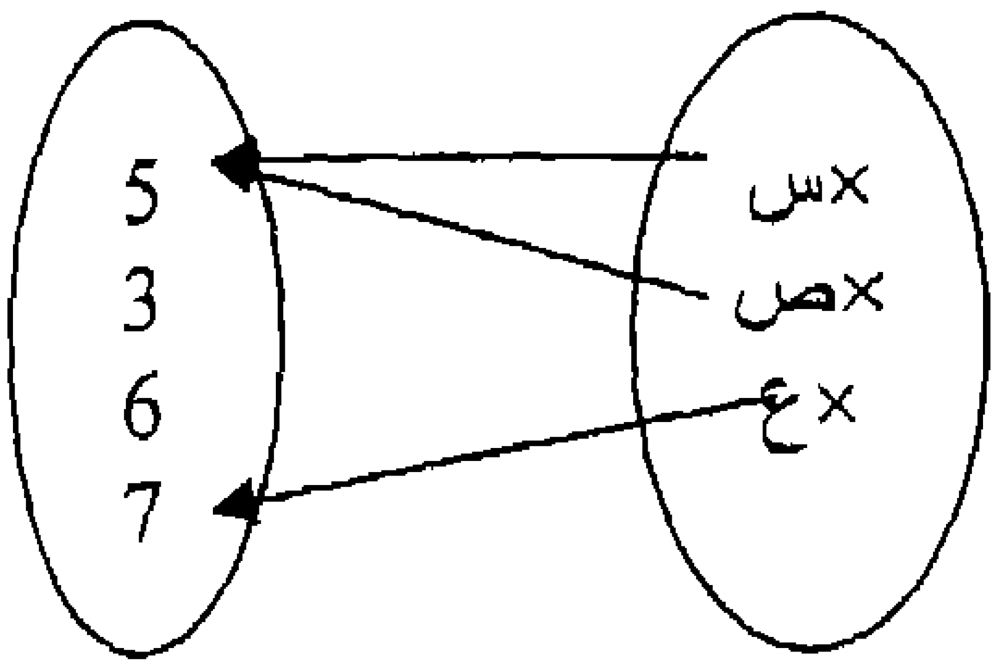
أ) { 3 ، 1 }

ب) { 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 ، 9 }

ج) { 4 ، 6 ، 8 }

د) { 5، 7 ، 9 }

4. إذا كان الرسم المبين يمثل اقتراناً فإن هذا الاقتران :



أ) متباين ب) شامل

ج) تناظر د) لاشيء مما ذكر

5. إذا كانت أ = { 1 ،2، 3 } ،وكانت ع علاقة على المجموعة أ ، حيث

ع = { (2،1) ، (1،2) ، (3،2) ، (2،3)، (3،2)} ، فإن هذه العلاقة :

أ) انعكاسية

ب) تماثلية

ج) متعدية

د) تكافؤ

6. إذا كانت أ = { أحمر ، أخضر ، أصفر } ، ب = { 1 ، 2 ، 3 } فإن هاتين المجموعتين:

أ) متساويتان

ب) متشابهتان

ج) متكافئتان

د) متطابقتان

7. إذا كانت أ ⊃ ب فإن ب ∩ أ =

أ) أ

ب) ب

ج) أ - ب

د) ب ∪ أ

8. إذا كان ن (أ) = 5 ، ن (ب) = 3 ، ن (أ ∪ ب) = 6، حيث ن عدد عناصر المجموعة ، فإن ن (أ ∩ ب) =

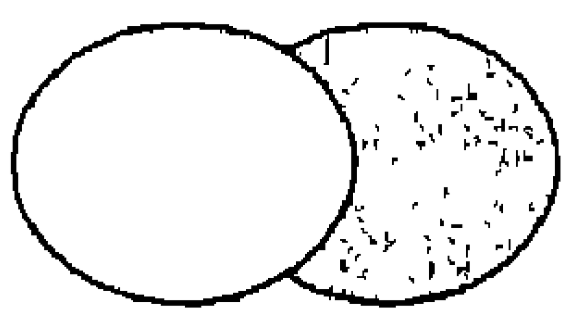
أ) 3

ب) 9

ج) 2

د) صفر

9. الجزء المظلل في الشكل فن المجاور يمثل : أ



ب

أ) أ – ب

ب) أ ∩ ب

ج) ب – أ

د) ب

10.إذا كانت أ = { 2، 4، 5 } ، ب = { 3، 2 } فإن ب – أ =

أ) { 4، 5 }

ب) { 2 }

ج) { 3 }

د) { 4 }

11.إذا كانت أ = { 2، { 1 } } فإن:

أ) {1 } ∋ أ

ب) 1 ∋ أ

ج) {1 } ⊃ أ

د) { 2 } ∋ أ

12. إذا كانت أ = { أحمد، خالد } ، ب = { سمر، هدى } فإن (سمر، خالد) ينتمي إلى :

أ) أ × أ

ب) أ × ب

ج) ب × ب

د) ب × أ

13. إذا كانت ب $\supset$ أ فإن ب $\cup$ أ =

أ) أ

ب) ب

ج) Φ

د) أ $\cap$ ب

14. إذا كان ن (ب) = 4 ، ن (أ × ب) = 8 ، فإن ن (أ) =

أ) 2

ب) 4

ج) 6

د) 32

15. علاقة " > " تحقق خاصية :

أ) الانعكاس

ب) التماثل

ج) التعدي

د) التكافؤ

16. إذا كانت ع علاقة " $\geq$ " فإن هذه العلاقة تحقق:

أ) التماثل

ب) الانعكاس

ج) التماثل و الانعكاس

د) التكافؤ

17. العلاقة $\{(1 ، 2) ، (2 ، 1) ، (2 ، 2) ، (2 ، 2)\}$ هي علاقة :

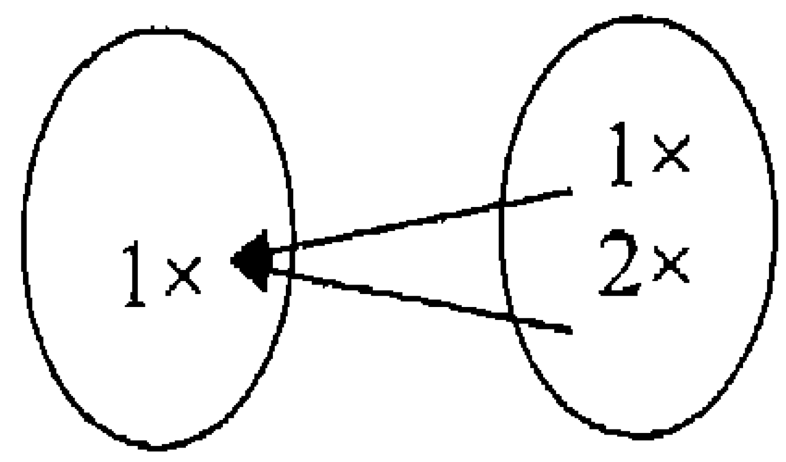
أ) انعكاسية

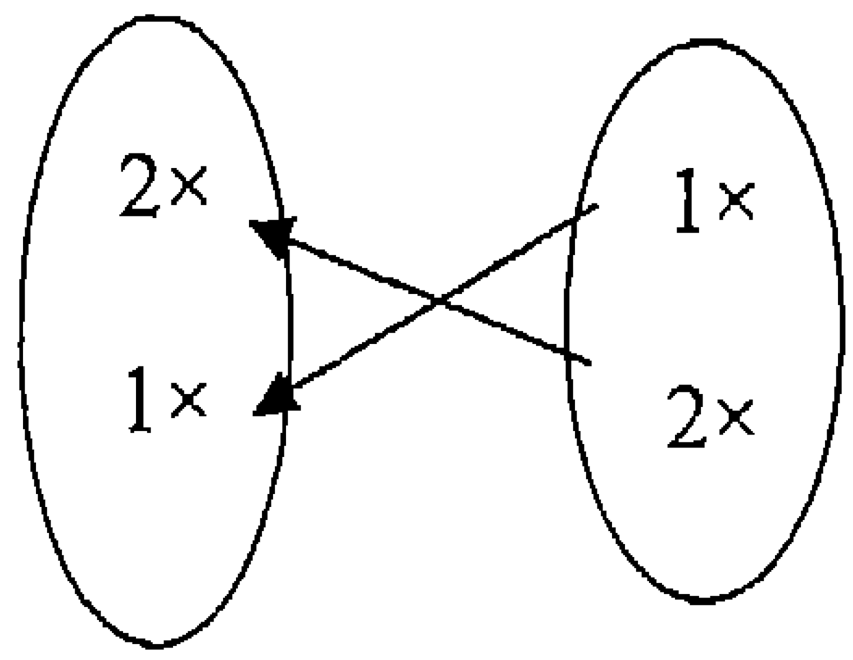
ب) تماثلية

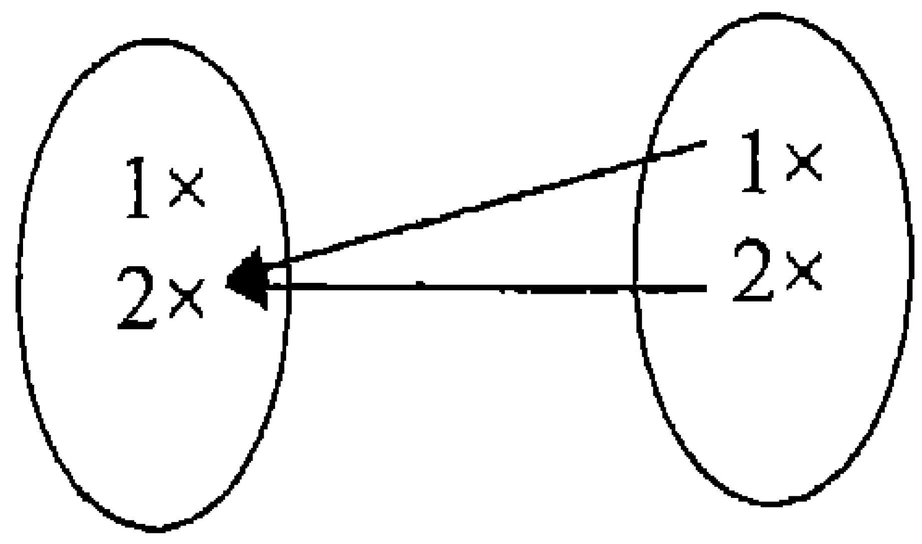
ج) متعدية

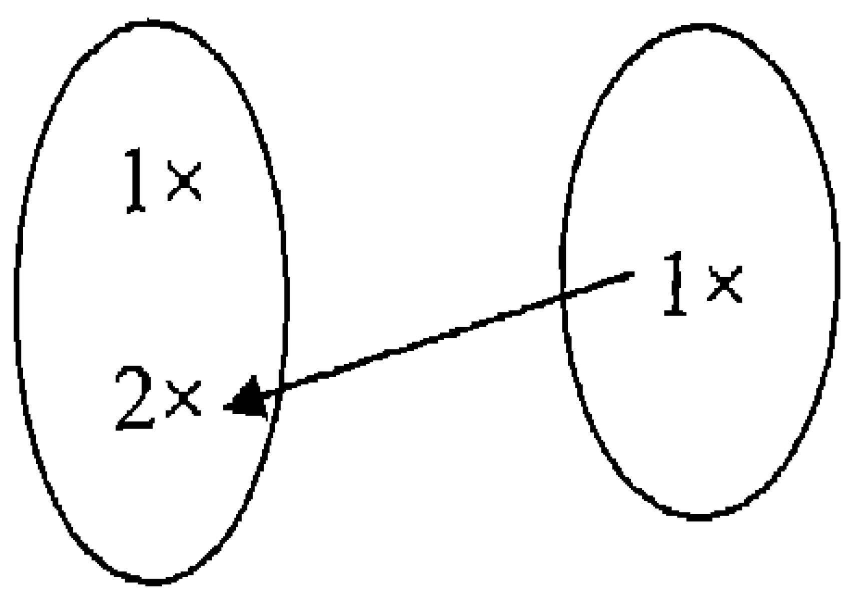
د) تكافؤ

18.الشكل الذي يمثل تقابلاً" واحداً لواحد " فيما يلي هو :

أ) 

ب) 

ج) 

د) 

19.العلاقة التي تحقق التماثل بين العلاقات الآتية هي:

أ) " $<$ "

ب) " $>$ "

ج) " $\geq$ "

د) " = "

20. أ ∪ ب = ب ∪ أ　هو مثال على خاصية :

أ) التوزيع

ب) التجميع

ج) التبديل

د) المحايد

2. إذا كانت أ = { 2، 4، 6 } ، ب = { 4، 8، 9 }، حـ = { 2، 1 }،

فاوجد (أ ∩ ب) ∪ ج ، (ج−أ) ∩ ب.

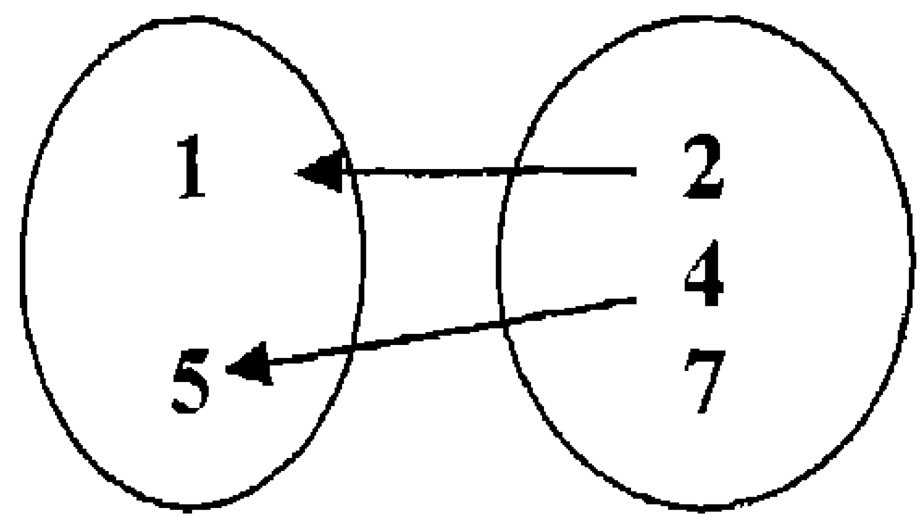
3. إذا كانت أ ، ب مجموعتين ، ش مجموعة شاملة ، استخدم أشكال فـن في توضيح أن أ − ب = أ ∩ بَ ثم تحقق من صحة ذلك باستخدام جداول الانتماء .

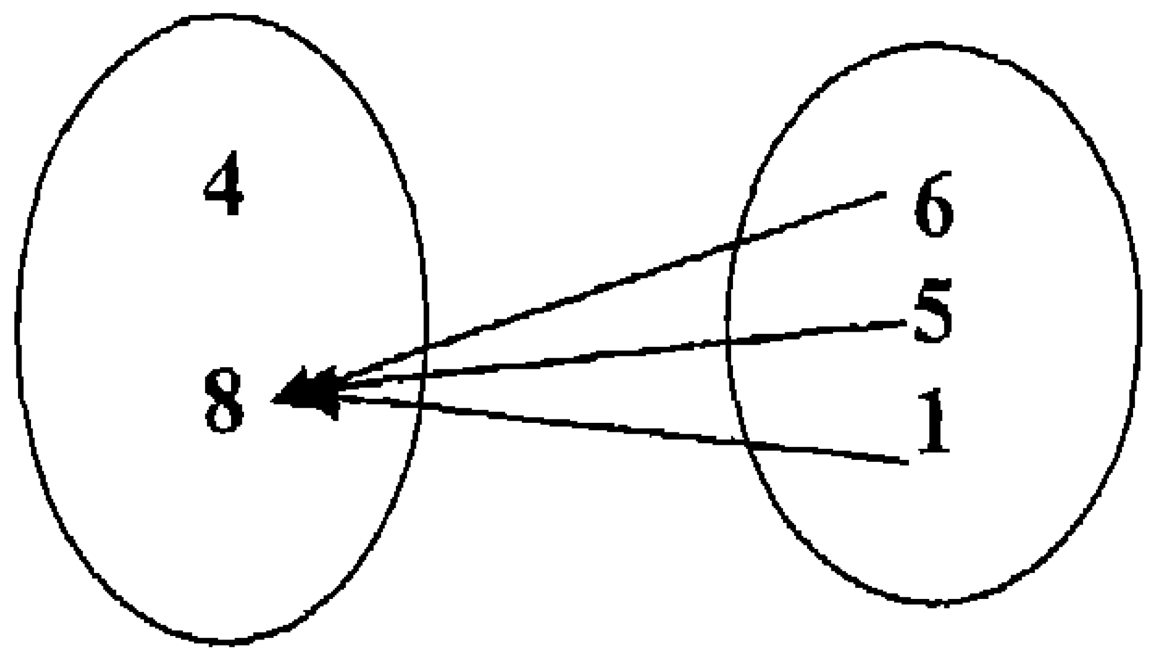
4. إذا كانت أ = { 2، 4، 5 } ، ع علاقة على أ بحيث أن :

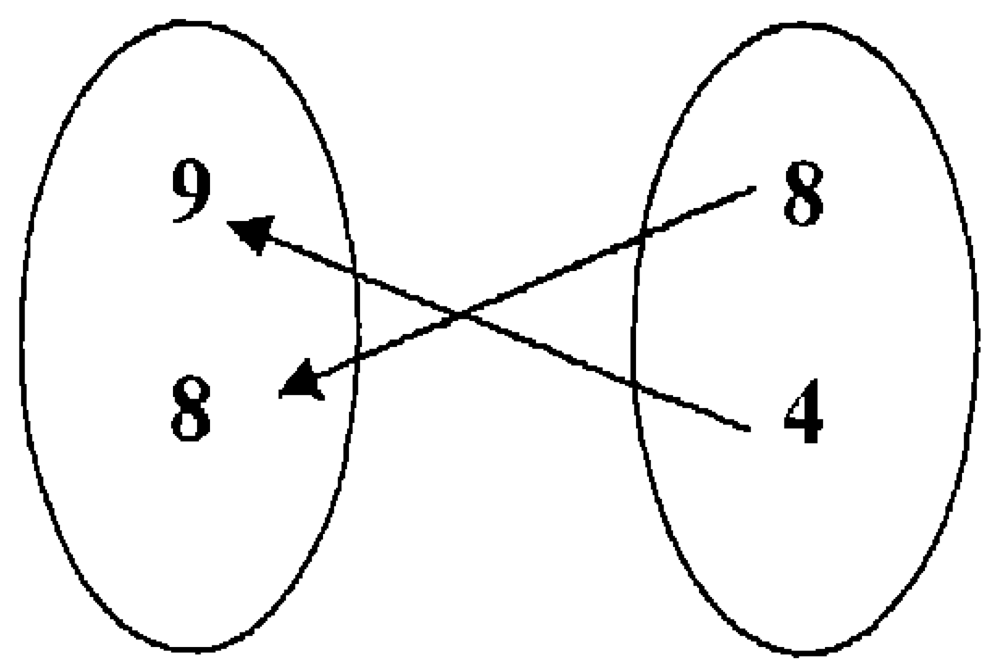
ع = { (2 ، 2)، (2، 4)، (2، 5)، (4 ، 4)، (4 ، 5)، (5 ، 5) }

ناقش هذه العلاقة من حيث : الانعكاس والتماثل والتعدي والتكافؤ .

5. حدد الاقترانات من العلاقات الموضحة في الأشكال التالية :

أ) 

ب) 

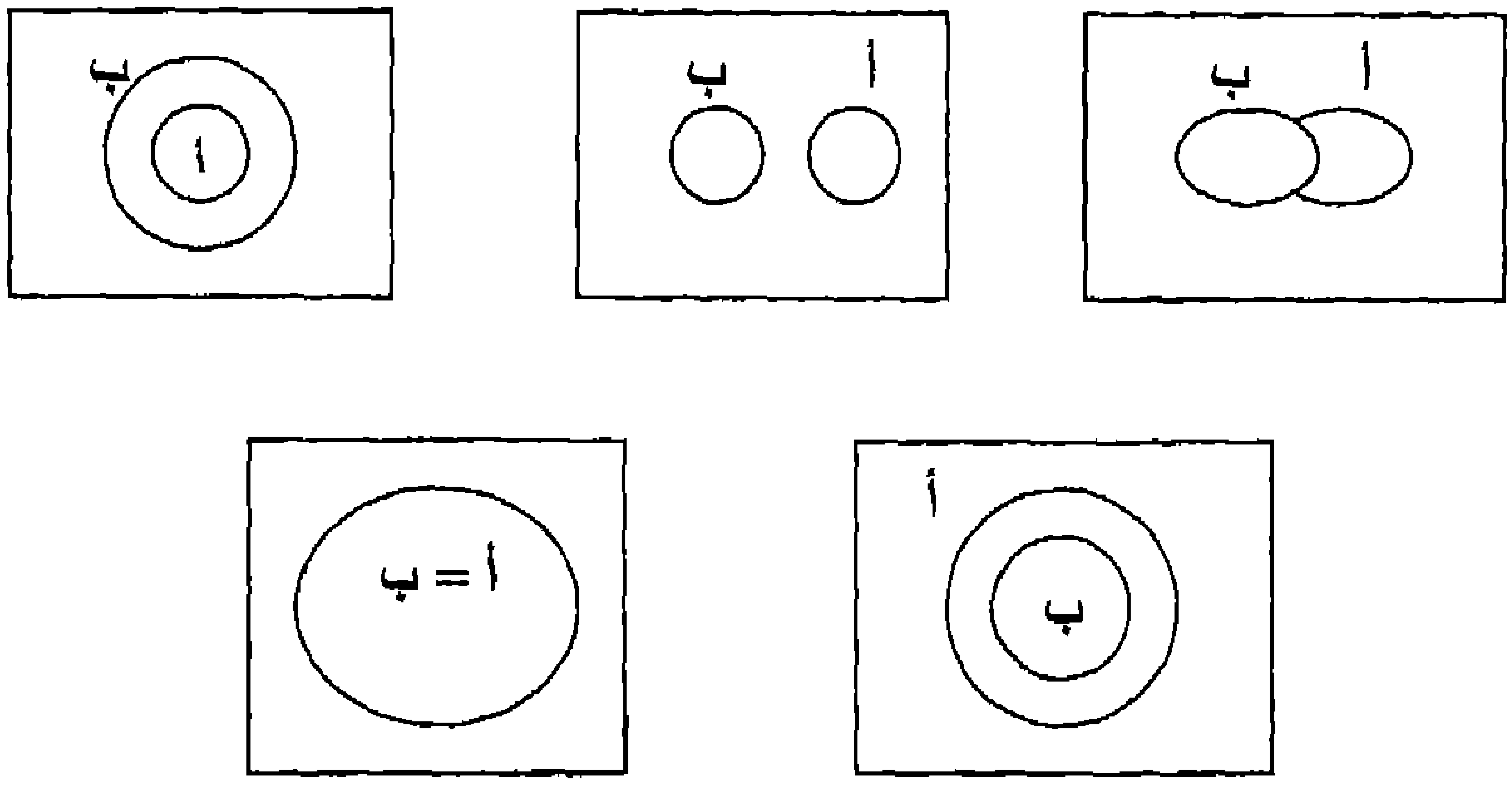
ج) 

ثم ناقش الاقترانات منها من حيث التباين والشمول والتناظر .

6. عرِّف كلاً مما يلي: ب – أ، علاقة التماثل، الاقتران المتباين، مدى الاقتران، المحايد، النظير، توزيع ❖ على ❖ من اليسار.

7. أعطِ مثالاً على عملية ثنائية، ثم ناقش هذا المثال من حيث الإغلاق والتجميع والتبديل.

8. أ) ظلّل ب – أ في كل شكل من أشكال ڤن المبينة :



ب) ظلل أ ∩ ب ، أ ∪ ب أيضاً بعد رسم أشكال ڤن كما في الفرع أ .

9. وضع ديمورغان قانونين في المجموعات هما:

$$\overline{أ \cup ب} = \overline{أ} \cap \overline{ب} \text{ ، } \overline{أ \cap ب} = \overline{أ} \cup \overline{ب}$$

تبين صحة هذين القانونين من خلال الأمثلة وأشكال ڤن التوضيحية ، ثم أثبت كلاً منهما باستخدام جداول الانتماء.

10. اختر مجموعة من عنصرين وأوجد مجموعاتها الجزئية ، ثم اختر مجموعة من ثلاثة عناصر وأوجد مجموعاتها الجزئية، وهكذا ....

وفي ضوء ذلك حاول أن تتوصل إلى قاعدة تجد من خلالها عدد المجموعات الجزئية إذا علم عدد عناصر المجموعة المعطاة.

الفصل الرابع

الأنظمة العددية

الأنظمة العددية

(1.4) مقدمة:

الرياضيات علم متسلسل يسير إلى الأمام دائماً، حاضره مبني على ماضيه، ومستقبله مبني على كليهما؛ إذ لا يمكن إهمال الماضي ما دامت حياة الفرد الواحد؛ بل حياة أي مجموعة من الأفراد قصيرة جداً، لدرجة أنها لا تسمح ببحث كل شيء من أوله، لهذا وجب علينا الأخذ من الأقدمين، ثم السعي لتحسين ما أخذناه وتطويره خدمة للعصر الذي نعيشه.

ولقد بدأت قصة العدد وكتابته منذ أن شعر الإنسان بالحاجة إلى عد الأشياء التي تحيط به، وبدأ فعلاً بمحاولة عدّها، ولم يظفر الإنسان بطريقة ملائمة للعد وكتابة الأعداد إلا بعد جهود كبيرة بذلتها الأجيال المتعاقبة على مر الأيام وطول الأعوام، بل وتعاقب العقود والقرون.

استعمل الإنسان البدائي الحصى في عد أغنامه عند الخروج بها للرعي في الصباح الباكر، فوضع عدداً من الحصى في جراب جلدي لعد أفراد قطيعه من الأغنام، وعند المساء يفتح جرابه ويقرن كل خروف بحصاة، فإذا بقي في الجراب حصاة أو أكثر، استدل من ذلك على وجود نقص في عدد أفراد القطيع بقدر عدد الحصى المتبقية في الجراب.

ولقد استمر في هذا الأسلوب من العد إلى أن واجه مشكلة الكثرة في عدد أفراد القطيع، فاستعان بأصابع يديه للعدد القليل، ومثّل كل عشرة منه بحصاة واحدة، وهكذا برزت فكرة الواحدات والعشرات.

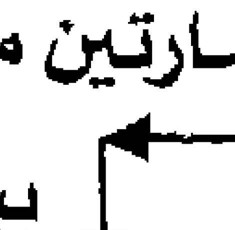
ويعرض الفصل الحالي موضوع الأنظمة العددية، باعتبار النظام العددي مجموعة الرموز (الأرقام) والقواعد التي تسمح بكتابة عدد ما وقراءته، وإجراء العمليات الحسابية فيه.

(2.4) النظام العددي العشري:

اهتدى الهنود قبل غيرهم من الأمم للنظام العددي العشري بأسلوب دقيق ومحكم، واقتبس العرب طريقتهم في كتابة الأعداد ثم عملوا على تهذيبها، وفيما يلي جدول بالأرقام الهندية قبل تهذيبها وبعده، حيث نتج عنها مجموعتين رقميتين سميت إحداهما بالأرقام الغبارية (العربية) والتي انتشرت في بلاد الأندلس ثم هاجرت إلى معظم الدول الأوروبية لانسجامها مع أحرف اللغات المشتقة من اللغة اللاتينية، ومنها اللغة الانجليزية. وسميت الأخرى بالأرقام الهندية وهي المجموعة المتداولة في معظم الدول العربية لانسجامها مع أحرف اللغة العربية وكلماتها.

الأرقام الهندية (قبل تهذيبها)	O	2	3	ʒ	Y	y	ɛ	ϑ	б	C
الأرقام الغبارية) (العربية)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
الأرقام الهندية (المتداولة عربياً)	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩

ولكن كيف هذبت الأرقام الهندية لتصبح كما هي عليه في كتب الرياضيات، وفي التعامل اليومي في معظم الدول العربية؟

من الواضح أن رمز العدد (الرقم) واحد يدل على شيء واحد، لهذا كتب ١، والرقم اثنان يدل على إشارتين موصولتين لهذا كتب ٢، والرقم ثلاثة يدل على ثلاث إشارات موصولة  ببعضها فأصبحت ٣، والرقم أربعة يدل على أربع إشارات موصولة لهذا كتب ٤ وهكذا ...

ويتميز النظام العددي الهندي المتداول في معظم الدول العربية بالآتي :

1. احتواء هذا النظام على رمز للعدد صفر (٠).
2. اعتماد أساس لهذا النظام هو العدد عشرة (١٠).

3. وجود منازل عشرية هي منزلة الواحدات وقيمتها (1) ومنزلة العشرات وقيمتها (10) ومنزلة المئات وقيمتها (100) وهكذا ...
4. وجود قيمة للعدد وفق المنزلة التي يحل بها ، فقيمة 2 في العدد 512 هي اثنان ، بينما قيمته في العدد 521 هي 2 × 10 = 20 ، وقيمته في العدد 215 هي 2 × 100 = 200.
5. كتابة أي عدد مهما كان كبيراً بسهولة ويسر بفضل المنازل العشرية .
6. سهولة إجراء العمليات الحسابية.

وعليه فالعدد ستة آلاف وثلاثمائة وتسعة عشر يكتب:

$$6319 = 9 \times 10^{0} + 1 \times 10^{1} + 3 \times 10^{2} + 6 \times 10^{3}$$
$$= 9 + 10 + 300 + 6000$$

وتجدر الإشارة إلى وجود محاولات لاستعمال الأرقام الغبارية مع أحرف اللغة العربية: أ، ب، ت، ...إلخ على الرغم من عدم انسجامها مع هذه الأحرف، فضلاً عن خطورة ذلك على التراث العربي الإسلامي وسلامة نطق هذه الأرقام باللغة العربية، ناهيك عن أن استعمال مجموعتي الأرقام في الكتب والتعامل اليومي مدعاة للخلط بين هذه الأرقام ، فالصفر في الأرقام الغبارية يقرأ خمسة في الأرقام الهندية المتداولة، والستة في الأرقام الهندية المتداولة تقرأ سبعة في الأرقام الغبارية! .

(3.4) النظام العددي الخماسي:

فتح النظام العددي العشري الباب واسعاً لتكوين أنظمة عددية أخرى ، مثل النظام العددي الخماسي والنظام العددي الثنائي وغيرهما كثير...

ولكل نظام منها استعمالاته في لغة العلم وفي بعض الأمور الحياتية، فضلاً عن اهتمام الرياضيين في تكوين البنى الرياضية بغض النظر عن استعمالاتها المباشرة، وللنظام العددي الخماسي خمسة أرقام هي ، 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، وأساسه العدد خمسة (5)، أما القيمة المنزلية فمبنية على العدد خمسة وقواه.

ويظهر الجدول التالي كتابة بعض الأعداد في هذا النظام مقارنة بالنظام العددي العشري:

العدد في النظام العشري	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
العدد في النظام الخماسي	0	1	2	3	4	10	11	12	13	14	20

وللتحويل من النظام العددي الخماسي إلى النظام العددي العشري :

إليك المثال التالي:

$$(2014)_5 = (4 \times 5^0) + (1 \times 5^1) + (0 \times 5^2) + (2 \times 5^3)$$
$$= 4 \times 1 + 1 \times 5 + 0 \times 25 + 2 \times 125$$
$$= 4 + 5 + 0 + 250 = (259)_{10}$$

وللتحويل من النظام العددي العشري إلى النظام العددي الخماسي :

إليك المثال السابق نفسه ، وذلك بتحويل ناتجه إلى النظام العددي الخماسي :

المقسوم	المقسوم عليه	الناتج	الباقي
259	5	51	4
51	5	10	1
10	5	2	0
2	5	0	2

وعند وصولنا إلى العدد (0) في الناتج نوقف عملية القسمة، فيكون العدد في النظام العددي الخماسي هو (2014) مأخوذاً من عمود البواقي ، بحيث أن أعلى رقم فيه يكون في أقصى اليمين ، وهكذا ...

وعليه فإن:

$$ {}_{5}(\,2014\,) \;=\; {}_{10}(\,259\,) $$

وهذا يؤكد صحة التحويل الذي تم آنفاً من النظام العددي الخماسي إلى النظام العددي العشري.

(4.4) النظام العددي الثنائي:

وجد النظام العددي الثنائي مكانته في الالكترونيات بعامة وفي الحاسوب بخاصة، ولهذا النظام رقمان فقط هما 0، 1 وأساس هو العدد اثنان (2)، أما القيمة المنزلية فمبنية على العدد اثنان وقواه.

ويظهر الجدول التالي كتابة بعض الأعداد في النظام الثنائي مقارنة بالنظام العددي العشري:

العدد في النظام العشري	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
العدد في النظام الثنائي	0	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010

وللتحويل من النظام العددي الثنائي إلى النظام العددي الخماسي:

إليك المثال الآتي:

$$(1010011)_2 = (1 \times 2^0) + (1 \times 2^1) + (0 \times 2^2) + (0 \times 2^3) + (1 \times 2^4) + (0 \times 2^5) + (1 \times 2^6)$$

$$= 1 \times 1 + 2 \times 1 + 4 \times 0 + 8 \times 0 + 16 \times 1 + 32 \times 0 + 64 \times 1$$

$$= 1 + 2 + 0 + 0 + 16 + 0 + 64 = (83)_{10}$$

وللتحويل من النظام العددي العشري إلى النظام العددي الثنائي :

إليك المثال السابق نفسه ، وذلك بتحويل ناتجه إلى النظام العددي الثنائي :

المقسوم	المقسوم عليه	الناتج	الباقي
83	2	41	1
41	2	20	1
20	2	10	0
10	2	5	0
5	2	2	1
2	2	1	0
1	2	0	1

وعند وصولنا إلى العدد (0) في الناتج نوقف عملية القسمة فيكون العدد في النظام العددي الثنائي هو (1010011) مأخوذاً من عمود البواقي بحيث أن أعلى رقم فيه يكون في أقصى اليمين ، وهكذا ...

وعليه فإن :

$${}_{2}(1010011) = {}_{10}(83)$$

وهذا يؤكد صحة التحويل الذي تم آنفاً من النظام العددي الثنائي إلى النظام العددي العشري.

(5.4) التحويل من النظام العددي الخماسي إلى النظام العددي الثنائي وبالعكس:

إن التحويل من النظام العددي الخماسي إلى النظام العددي الثنائي يتم وفق الخطوتين الآتيتين:

1. التحويل من النظام العددي الخماسي إلى النظام العددي العشري
2. تحويل الناتج من النظام العددي العشري إلى النظام العددي الثنائي

وفيما يلي مثال توضيحي:

$${}_{2}(\ ؟\ ) = {}_{5}(14)$$

الحل:

$${}^{1}5 \times 1 + {}^{0}5 \times 4 = {}_{5}(14)$$

$$5 + 4 =$$

$${}_{10}(9) =$$

ثم $(9)_{10} = {}_{2}(\ ؟\ )$

المقسوم	المقسوم عليه	الناتج	الباقي
9	2	4	1
4	2	2	0
2	2	1	0
1	2	0	1

وعليه فإن: $(14)_5 = (9)_{10} = (1001)_2$

وكذلك فإن التحويل من النظام العددي الثنائي إلى النظام العددي الخماسي يتم وفق الخطوتين الآتيتين:

1. التحويل من النظام العددي الثنائي إلى النظام العددي العشري
2. تحويل الناتج من النظام العددي العشري إلى النظام العددي الخماسي

وفيما يلي مثال توضيحي:

$$(10011)_2 = (\text{؟})_5$$

الحل:

$$(10011)_2 = (1 \times 2^0) + (1 \times 2^1) + (0 \times 2^2) +$$

$$(0 \times 2^3) + (1 \times 2^4)$$

$$= 1 \times 1 + 2 \times 1 + 4 \times 0 + 8 \times 0 + 16 \times 1$$

$$= 1 + 2 + 0 + 0 + 16 = (19)_{10}$$

ثم $(19)_{10} = (\text{؟})_5$

المقسوم	المقسوم عليه	الناتج	الباقي
19	5	3	4
3	5	0	3

وعليه فإن : $(10011)_2 = (19)_{10} = (34)_5$

وبعد، فإنه بإمكان الدارس أن يكوّن أي نظام عددي يشاء ويجري التحويل فيما بينه وبين النظام العددي العشري أو أي نظام عددي آخر.

(6.4) تمارين ونشاطات:

1. ضع إشارة (×) على رمز الإجابة الصحيحة لكل فقرة مما يأتي:

1. $(14)_5$ يساوي

أ) $(14)_{10}$

ب) $(41)_{10}$

ج) $(9)_{10}$

د) $(111)_2$

2. $(1101)_2$ يساوي

أ) $(13)_{10}$

ب) $(1101)_{10}$

ج) $(25)_{10}$

د) $(101)_5$

3. $(31)_{10}$ يساوي

أ) $(13)_5$

ب) $(111)_2$

ج) $(111)_5$

د) $(31)_5$

4. $(53)_{10}$ يساوي

أ) $(23)_5$

ب) $(110101)_2$

ج) $(43)_5$

د) $(100001)_2$

5. $(11)_2$ يساوي

أ) $(11)_5$

ب) $(3)_5$

ج) $(11)_{10}$

د) $(30)_5$

6. $(101)_2$ يساوي في النظام العددي العشري :

أ) 101

ب) 5

ج) 4

د) 10

7. (6) في النظام العددي العشري :

أ) $(6)_5$

ب) $(11)_5$

ج) $(21)_5$

د) $(12)_5$

8. $(204)_5$ =

أ) $(204)_{10}$

ب) $(402)_5$

ج) $(1111)_2$

د) $(110110)_2$

9. $(1101)_2$ =

أ) $(11)_{10}$

ب) $(13)_{10}$

ج) $(31)_{10}$

د) $(1011)_{10}$

10. $(101)_2$ =

أ) $(101)_{10}$

ب) $(101)_5$

ج) $(10)_5$

د) $(26)_{10}$

11. العدد $(1001)_2$ يساوي في النظام العددي العشري:

أ) 9 ب) 17 ج) 101 د) 11

12. $(11)_2$ =

أ) $(2)_{10}$

ب) $(11)_{10}$

ج) $(3)_{10}$

د) $(3)_5$

13. (10) في النظام العددي العشري =

أ) $(10)_2$

ب) $(40)_5$

ج) $(100)_2$

د) $(20)_5$

14. $(40)_5$ =

أ) $(20)_{10}$

ب) $(40)_{10}$

ج) $(1111)_2$

د) $(10000)_2$

2. اكتب رموز الأعداد العشرية 2 ، 6 ، 9 بنظام الأعداد الهندية قبل تهذيبها من قبل العرب .

3. استعمل القيمة المنزلية العشرية في تحليل العدد 2597 إلى مكوناته .

4. ما العدد العشري المساوي للعدد $(100011)_2$ ؟

5. ما العدد العشري المساوي للعدد $(401)_5$ ؟

6. ما العدد الثنائي المساوي للعدد $(62)_{10}$ ؟

7. ما العدد الخماسي المساوي للعدد $(81)_{10}$ ؟

8. املأ الفراغ في كلٍّ مما يلي بالإجابة الصحيحة :

$(73)_{10} = (\quad\quad)_5$

$(52)_{10} = (\quad\quad)_2$

$(41)_5 = (\quad\quad)_{10}$

$_2(11101) = {}_{10}(\quad)$

$_5(43) = {}_2(\quad)$

$_2(10101) = {}_5(\quad)$

9. درست ثلاثة انظمة عددية والتحويل فيما بينها ، والمطلوب منك أن تعود للمراجع المتوافرة في المكتبة التقليدية أو الالكترونية للكشف عن أنظمة عددية أخرى قديمة كانت أو حديثة وكيفية استعمالها وإعداد تقرير عن أحدها على الأقل.

الفصل الخامس

الأعداد الكلية

"الطبيعية والصفر"

الأعداد الكلية : الطبيعية والصفر

(1.5) مقدمة:

منذ بدأت الحياة البشرية؛ واجه الإنسان العديد من المشكلات، وظهرت الحاجة إلى استخدام الأعداد ليستخدمها الإنسان في حل مشكلاته العديدة خاصة عند إجرائه التعاملات المختلفة مع الآخرين.

ومن الطريف متابعة المراحل التي مر بها الإنسان ما قبل التاريخ من حيث تعلّمه كيف يعد، إذ كان من المهم لديه أن يعرف عدد رؤوس ماشيته أو كمية محصول حقله وأن يسجل ذلك، فاستخدام حصاةً مقابل كل رأس ماشية، وعليه فقد بدأ بمجموعات من الأشياء تبدأ بالواحد، فكان أول عدد طبيعي هو العدد واحد فالعدد اثنان وهكذا ......، أي أن أول مجموعة عددية تعامل معها في حياته اليومية هي مجموعة الإعداد الطبيعية {1، 2، 3،...}.

لقد تطورت النظم العددية المختلفة عبر القرون الماضية، وأخذ بعضها عن بعض حتى استقرت في النهاية إلى النظام العددي الحالي (النظام العشري) والذي كان للعرب الدور الأكبر في تطويره عن النظام الهندي.

وتعتبر المجموعة الأولى التي تعامل معها الإنسان؛ مجموعة الأعداد الطبيعية نواة لكل أنواع الأعداد الأخرى، وقد عُرّفت هذه المجموعة العددية على أنها المجموعة التي تضم الأعداد الصحيحة الموجبة، ورمز لها بالرمز ط، حيث ط = {1، 2، 3، ...}.

ولّما كان الصفر ميزة النظام العددي العشري، وكان لاكتشافه الدور الأكبر في تطور علم الرياضيات وما يتصل بها من علوم، ولما له من أهمية كبيرة وضرورة في كتابة رموز الأعداد في النظام العددي العشري وفي إجراء العمليات الحسابية المختلفة؛ فقد تم تطوير مجموعة الأعداد الطبيعية إلى مجموعة جديدة تضم معها الصفر، وسميت بمجموعة الأعداد الكلية ك، حيث ك = {0، 1، 2، 3،...}.

وسيتناول هذا الفصل مجموعة الأعداد الكلية والعمليات عليها وخصائص هذه العمليات.

(2.5) الأعداد الطبيعية والأعداد الكلية:

يعتبر المفهوم فكرة مجرّدة يمكن بواسطتها تحديد الأشياء من حيث انتمائها أو عدم انتمائها لهذه الفكرة، وحيث أن العدد مفهوم، فالعدد هو فكرة مجردة أيضاً. أما ما نكتبه مثل 1، 5 وغيرها ؛ فلا يتعدى كونه أكثر من رموز تدل على العدد وليست العدد نفسه.

ومن حيث المسلّمات المتعلقة بالأعداد، فقد أشار إليها الرياضي إقليدس (200 ق.م) في كتابه الأصول (Elements) عندما وضع مجموعة من المبادئ العامة مفترضاً صدقها على جميع فروع الرياضيات ومسلّماً بصحتها دون برهان وهي:

1. الأشياء المساوية لشيء واحد أو أشياء متساوية تكون متساوية.
2. إذا جُمعت أشياء متساوية إلى أشياء متساوية كانت النواتج متساوية.
3. إذا طُرحت أشياء متساوية من أشياء متساوية كانت النواتج متساوية.
4. الأشياء التي ينطبق بعضها على بعض تمام الانطباق متساوية.
5. الكل أكبر من الجزء.

ويتضح من هذه المسلمات ورود عدة مفاهيم رياضية هي التساوي، الواحد، الجمع، الطرح، الانطباق، الكل، الجزء، وهكذا بات مفهوم العدد متضمناً لإجراء العمليات الحسابية والتعامل مع الأشياء.

وفي العصر الحديث، وضع بيانو مسلماته فيما يخص الأعداد الطبيعية وهي:

1. $1 \in$ ط

2. لكل عدد طبيعي ن ∈ ط فإنه يوجد عدد تالي ن + 1 ∈ ط
3. العدد (1) ليس تالياً لأي عدد طبيعي
4. إذا كان ن ، م ∈ ط ، وكان ن ≠ م فإن ن + 1 ≠ م + 1
5. إذا كانت أ ⊂ ط ، 1 ∈ أ وكان ن + 1 ∈ أ لكل ن ∈ أ فإن أ = ط

وهكذا تكون الأعداد الطبيعية (ط) قد بدأت بالعدد (1)، وعندما ن = 1 فإن 1 + 1 = 2 ∈ ط، وكذلك 2 + 1 ∈ ط، أي أن:

ط = {1 ، 2 ، 3 ، ....}، كما ويتضح من المسلمة الثانية أن ط هي مجموعة غير منتهية، وأن ن + 1 تعبير مبدئي عن مفهوم الجمع.

وحيث أن عملية الجمع لا يمكن أن تستغني عن الصفر (والذي لا يُتضمّن في ط)، فإن الحديث عن الجمع والطرح وغيرهما لا بد أن يتم باستخدام مجموعة الأعداد الكلية (whole Numbers) لتضمنها الصفر.

ومن هنا، تُعرّف مجموعة الأعداد الكلية على أنها:

ك = {0، 1، 2، 3، ......}، أي أن مجموعة الأعداد الكلية تتألف من الأعداد الطبيعية والصفر، ولو أردنا التعبير عن مجموعة الأعداد الطبيعية فقط (الأعداد الصحيحة الموجبة) بدلالة الأعداد الكلية، فإن:

ك* = {1، 2، 3، ...} = ط ، ومن الواضح أن ط ⊂ ك.

(3.5) العمليات على الأعداد الكلية:

يتناول هذا البند العمليات الحسابية الأربعة (الجمع، الطرح، الضرب، القسمة)، وكيفية إجرائها وخواصها على مجموعة الأعداد الكلية.

(1.3.5) عملية الجمع على الأعداد الكلية:

يعبر عن مفهوم الجمع في الأعداد الكلية من خلال ضم (دمج) عناصر مجموعتين أو أكثر في مجموعة واحدة، وهذه العملية تقابل عملية اتحاد المجموعات المنفصلة السابق ذكرها، إذ أن اتحاد مجموعتين منفصلتين يكوّن مجموعة جديدة تحوي العناصر التي تنتمي إلى المجموعتين، وبذلك يرتبط مفهوم جمع الأعداد الكلية بمفهوم الاتحاد في المجموعات، وبناءً عليه يُعرّف مفهوم الجمع كالآتي:

إذا كانت س ، ص مجموعتين منفصلتين ومنتهيتين ، وكان ن يرمز لعدد عناصر المجموعة، وأن ن (س) = أ،ن(ص) = ب، فإن أ + ب = ن (س $\cup$ ص)

وكذلك، تعّرف عملية الجمع في الأعداد الكلية، كالآتي:

إذا كان أ ، ب $\in$ ك حيث أ $>$ ب ، فإنه يوجد حـ $\in$ ك ، حـ $\neq$ صفر

إذاً وإذاً فقط أ = ب + حـ

فمثلاً : $9 > 3 \Leftrightarrow 9 = 3 +$ حـ ، حـ $\neq$ صفر

وهذا يعني أن حـ = 6 ، لأنه العدد الذي يضاف إلى العدد 3 فيكون الناتج العدد 9، $9 = 6 + 3$

(2.3.5) عملية الطرح على الأعداد الكلية:

يعبر عن مفهوم الطرح في الأعداد الكلية على أساس عزل مجموعة جزئية من مجموعة معطاة، فإذا كانت أ = {0، 1، 2، 3}، ب = { 1 ، 3 } فإن أ − ب = { 0 ، 2 }.

ويُنظر للطرح أيضاً على أنه عملية عكسية للجمع حيث:

$3=2 \quad -5 \Leftarrow 5=3+2$

وبناءً عليه يمكن تعريف الطرح كالآتي:

إذا كان أ ، ب $\ni$ ك ، أ $\leq$ ب ووجد عدد طبيعي آخر جـ ، بحيث

أ = ب + جـ $\Leftarrow$ جـ = أ − ب (وتقرأ أ ناقص ب)

ونسمي جـ الفرق بين أ، ب أو ناتج الطرح.

وبإمعان النظر في التعريف ، نجد أن أ $\leq$ ب هو شرط أساسي لتعريف عملية الطرح على الأعداد الكلية.

فمثلاً، $7 > 2 \Leftarrow 7 = 2 +$ جـ

إذاً جـ = $7 - 2 \Leftarrow 7 - 2 = 5$ لأن $7 = 2 + 5$

ولكن لو كانت جـ = $2 - 7$ فإن $(2 - 7)$ لا يمكن أن يكون عدداً كلياً ، لأنه لا يوجد عدد كلي إذا جمع إلى العدد (7) يكون الناتج العدد (2) .

(3.3.5) عملية الضرب على الأعداد الكلية :

تعتبر عملية الضرب حالة خاصة من عملية الجمع، إذ أن الضرب هو اتحاد مجموعات منفصلة ومتكافئة.

فإذا كانت س، ص، ل هي مجموعات متكافئة عدد عناصر كلٌ منها يساوي 4 فإن:

ن (س $\cup$ ص $\cup$ ل) = ن (س) + ن (ص) + ن (ل)

أي أن $12 = 4 + 4 + 4$

ويُختزل ذلك باستخدام عملية الضرب ليصبح $3 \times 4 = 12$ ، أي أن ثلاث أربعات = 12 .

ويمكن ملاحظة استبدال عملية الجمع والتي ظهرت مرتين بعملية الضرب التي ظهرت مرّة واحدة.

ويعتبر المثال أعلاه بمثابة أحد نواتج ضرب العدد (4) بعدد ما هو العدد (3).

وعليه تُعرّف عملية الضرب كالآتي:

إذا كان أ ، ب ∋ ك فإن

أ × ب = ب + ب + ب + ... + ب (أ من المرات).

أي أن عملية الضرب هي عملية جمع متكرر.

فمثلاً:

$3 \times 7 = 7 + 7 + 7 = 21$

(4.3.5) عملية القسمة على الأعداد الكلية:

يُنظر لعملية القسمة على أنها عملية عكسية للضرب، إذ أن:

$3 \times 4 = 12 \Leftarrow 12 \div 3 = 4$ و $12 \div 4 = 3$

ويُفسر ذلك على أساس أنه إذا أعطيت الناتج وأعطيت عدد عناصر المجموعة الواحدة فإنك تجد عدد المجموعات: $12 \div 4 = 3$، وإذا أعطيت الناتج وأعطيت عدد المجموعات فإنك تجد عدد العناصر في المجموعة الواحدة: $12 \div 3 = 4$.

كما ينظر للقسمة على أنها طرح متكرر من المجموعة المعطاة، أي أن 12 – 4 = 8، 8 – 4 = 4 ، 4 – 4 = صفر، وعليه إذا طرحنا عدد عناصر المجموعة الواحدة 3 مرات ، يكون عدد المجموعات =3 ويُبرز هذا المثال القسمة على أنها عملية اختزال للطرح.

وعليه تعرّف عملية القسمة كالآتي:

إذا كان أ ، ب ∋ ك ، ب ≠ صفر ، ووجد عدد حـ ∋ ك بحيث

أ = ب × حـ ⇐ حـ = أ ÷ ب (أ تقسيم ب)

تسمى حـ: خارج (ناتج) القسمة لـ أ على ب، وتسمى أ: المقسوم، وتسمى ب: المقسوم عليه.

فمثلاً:

15 ÷ 3 = 5 لأن 15 = 3 × 5

ملاحظات هامة:

1. لاحظ أن ب ≠ صفر شرط أساسي في تعريف عملية القسمة ، إذ لا يجوز أن يكون المقسوم عليه يساوي صفراً بأي حال من الأحوال حتى لا تنتج قيمة غير معرّفة أو غير محددة (بمعنى التقسيم على صفر غير معرّف) .
2. لاحظ أن حـ ∋ ك ، فإذا لم يوجد حـ ∋ ك وتحقق حـ = أ ÷ ب فإن عملية القسمة على الأعداد الكلية تكون غير معرّفة أو غير محددة أيضاً .
3. يمكنك أيضاً ملاحظة أن:

المقسوم = خارج القسمة × المقسوم عليه

مثال:

جد ناتج القسمة فيما يلي ، ثم تحقق من صحة الناتج:

أ) $24 \div 6$

ب) $27 \div 3$

الحل:

أ) $24 \div 6 = 4$ ، $6 \times 4 = 24$

ب) $27 \div 3 = 9$ ، $3 \times 9 = 27$

والآن، ماذا لو حاولنا إيجاد ناتج قسمة $47 \div 5$ ؟!

لعلك تلاحظ أنه لا يوجد عدد يمكن أن يُضرب في العدد 5 ويكون الناتج 47 حسب تعريف عملية القسمة ، وهذا يستدعي التعرف إلى كيفية إيجاد نواتج لمثل هذه العمليات من خلال ما يدعى بخوارزمية القسمة وهي الخوارزمية الأعم والأشمل لإجراء عملية القسمة .

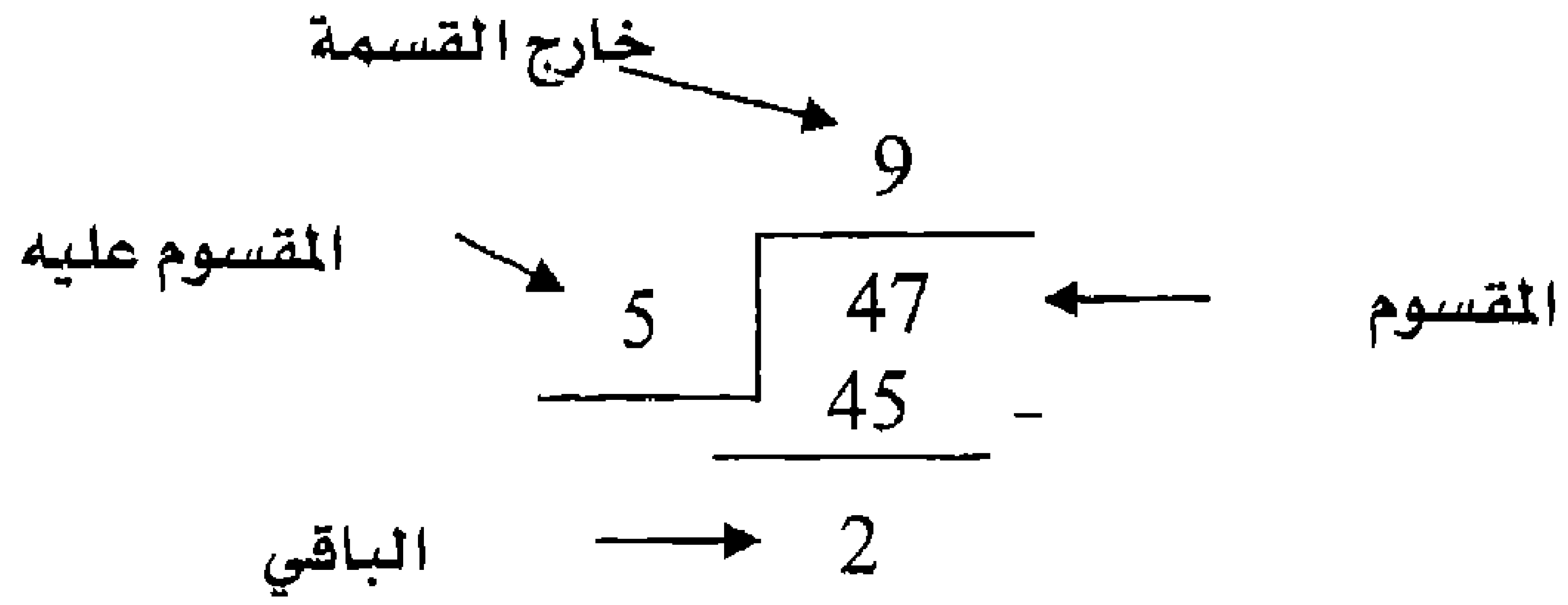
خوارزمية القسمة:

إذا كان أ ، ب $\in$ ك ، ب $\neq$ صفر، فإنه يوجد عدد جـ $\in$ ك (خارج القسمة) وعدد د $\in$ ك (الباقي) حيث أن:

أ = ب × جـ + د ، صفر $\leq$ د $<$ ب

أي أن المقسوم = خارج القسمة × المقسوم عليه + الباقي

وعندها يصبح إيجاد ناتج 47 ÷ 5 ممكناً كالآتي:



أي أن 47 ÷ 5 = 9 والباقي 2

وللتحقق من صحة الحل فإن :

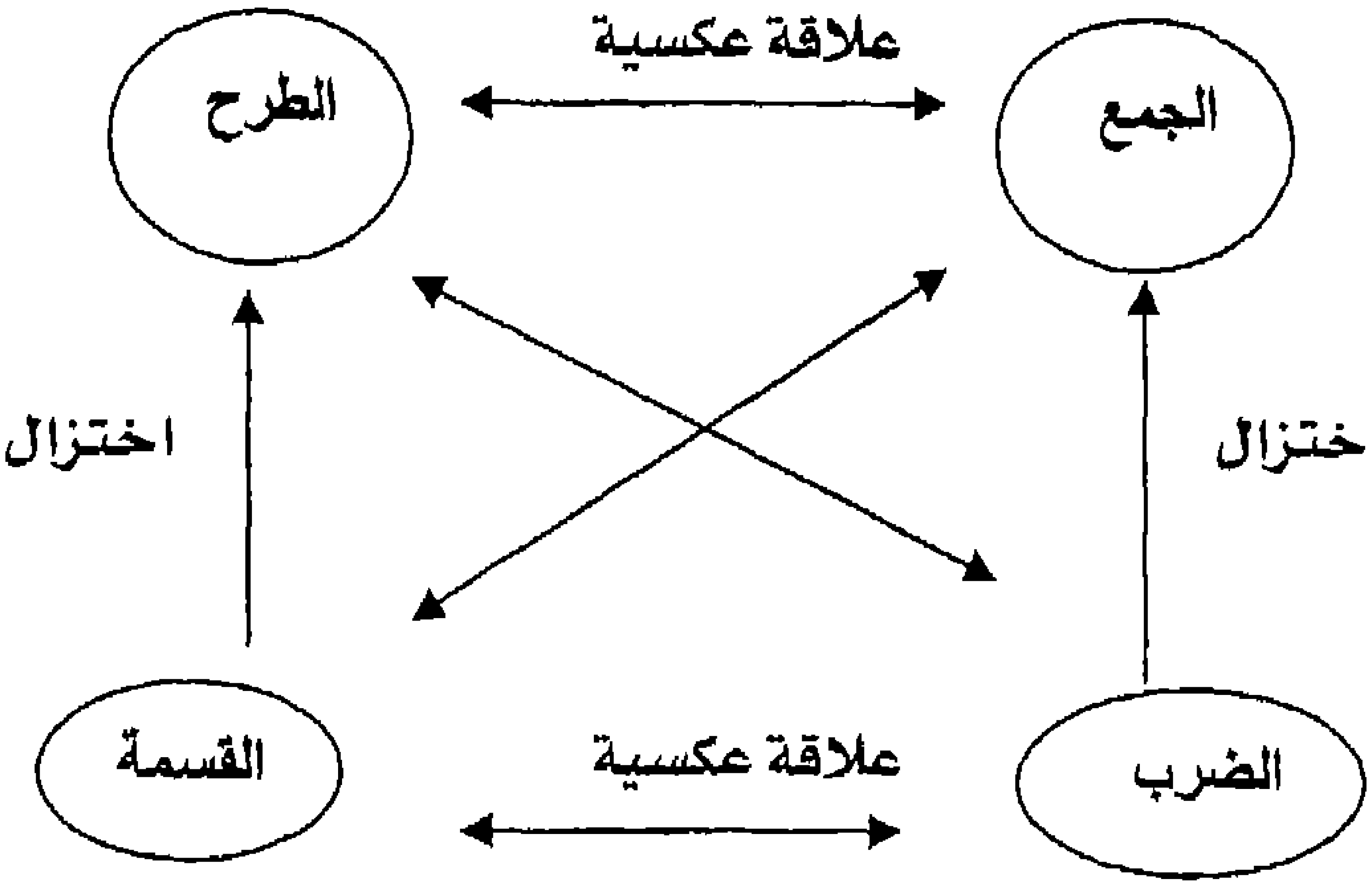
9× 5 + 2 = 45 + 2 = 47 (المقسوم)

تدريب :

استخدام خوارزمية القسمة لإيجاد ناتج قسمة

39 ÷ 7 ، ثم تحقق من صحة الحل .

ومما سبق، يمكن إيضاح العلاقة بين العمليات الحسابية الأربعة من خلال الشكل (5 – 1).



الشكل (5 – 1): العلاقة بين العمليات الحسابية

(4.5) خصائص العمليات الحسابية على الأعداد الكلية:

تعتبر العمليات (ك، +) ، (ك ، –) ، (ك ، ×) ، (ك ، ÷) عمليات ثنائية يجدر بنا دراسة خصائصها كالآتي:

(1.4.5) خصائص عملية الجمع على الأعداد الكلية:

لقد سبق وتعرّفنا خصائص عملية الاتحاد على المجموعات، وبناءً عليه، وحيث أن عملية الجمع ترتبط بعملية الاتحاد؛ فإنه يمكن تحديد خصائص عملية الجمع بالاعتماد على خصائص عملية الاتحاد على النحو الآتي:

1) خاصية الانغلاق:

وتعبر هذه الخاصية عن انتماء ناتج جمع أي عددين كليين إلى المجموعة نفسها، بمعنى أن ناتج جمع أي عددين كليين هو عدد كلي، وعندها نقول أن مجموعة الأعداد الكلية مغلقة تحت عملية الجمع.

فإذا كان أ ، ب $\in$ ك ، فإن أ + ب $\in$ ك

مثال(1):

تحقق من صحة خاصية انغلاق الجمع على مجموعة الأعداد الكلية بأمثلة عددية .

الحل:

5، 8 $\in$ ك ⇐ 5 + 8 = 13 $\in$ ك

11 + 7 $\in$ ك ⇐ 11 + 7 = 18 $\in$ ك

مثال (2):

هل ك* مغلقة تحت عملية الجمع؟

الحل:

ك* = { 1 ، 2 ، 3 ، ... }

1 + 3 = 4 $\in$ ك*

5 + 7 = 12 $\in$ ك*

وهكذا لجميع قيم ك* فإن كل عددين منتميين لـ ك* ناتج جمعهما ينتمي لهذه المجموعة.

2) الخاصية الإبدالية:

إذا كان أ ، ب $\in$ ك فإن أ + ب = ب + أ

مثال:

تحقق من صحة الخاصية الابدالية في جمع الأعداد الكلية بأمثلة عددية.

الحل:

13، 10 ∋ ك

13 + 10 = 23 ، 10 + 13 = 23

⇐ 13 + 10 = 10 + 13

وكذلك صفر، 9 ∋ ك

صفر + 9 = 9 ، 9 + صفر = 9

⇐ صفر + 9 = 9 + صفر

3) الخاصية التجميعية:

إذا كان أ ، ب ، جـ ∋ ك فإن (أ + ب) + ج = أ + (ب + ج)

مثال:

تحقق من صحة الخاصية التجميعية فيما يلي:

$(3+4)+8 = 3+(4+8)$

الحل:

الطرف الأيمن = $(3+4)+8 = 7+8$

$= 15$

الطرف الأيسر = $3+(4+8) = 3+12$

$= 15$

إذن: الطرفان متساويان.

4) خاصية العنصر المحايد في عملية الجمع على الأعداد الكلية:

إن عملية الجمع على الأعداد الكلية تحوي عنصراً محايداً هو (الصفر).

حيث أنه إذا كان أ $\in$ ك فإن أ + 0 = 0 + أ = أ

مثال:

أعطِ مثالاً يوضح أن العنصر المحايد في عملية جمع الأعداد الكلية هو الصفر.

الحل:

7 $\in$ ك

$7 + 0 = 0 + 7 = 7$

وكذلك، 13 $\in$ ك

$13 + 0 = 0 + 13 = 13$

(2.4.5) خصائص عملية الطرح على الأعداد الكلية:

إن عملية الطرح على الأعداد الكلية لا تحقق أياً من الخصائص السابقة التي حققتها عملية الجمع فهي:

1) ليست مغلقة:

فمثلاً، إذا كان 7 ، 13 $\in$ ك.

فإن 7 - 13 $\notin$ ك

2) ليست تبديلية:

فمثلاً ، 8، 12 $\in$ ك

$12 - 8 \neq 8 - 12$

إذ أن $12 - 8 = 4 \in$ ك

بينما $8 - 12 \notin$ ك

3) ليست تجميعية:

فمثلاً ، $(8 - 3) - 1 \neq 8 - (3 - 1)$

لأن الطرف الأيمن = $(8 - 3) - 1 = 5 - 1$

$= 4$

بينما الطرف الأيسر = $8 - (3 - 1) = 8 - 2$

$= 6$

$\Leftarrow \quad 4 \neq 6$

إذن: الطرفان غير متساويين

4) لا يوجد عنصر محايد في عملية الطرح:

إذ أنه على الرغم من أن أ − 0 = أ لأي أ $\in$ ك

إلا أن 0 − أ $\neq$ أ ، وبذلك فلا يمكن اعتبار العدد (صفر) عنصراً محايداً في عملية الطرح.

إذ أن أ − 0 $\neq$ 0 − أ $\neq$ أ عدا العدد صفر فقط في مجموعة الأعداد الكلية.

(3.4.5) خصائص عملية الضرب على الأعداد الكلية:

1) خاصية الانغلاق:

إذ كان أ ، ب $\in$ ك فإن أ × ب $\in$ ك

أي أن ناتج ضرب أي عددين كليين هو عدد كلي، وهذا يعني أن مجموعة الأعداد الكلية مغلقة تحت عملية الضرب.

مثال:

تحقق من انغلاقية الضرب فيما يأتي:

أ) 4، 6

ب) 2، 9

الحل:

أ) $4 \times 6 = 6 + 6 + 6 + 6$

= 24 $\in$ ك

ب) $2 \times 9 = 9 + 9$

= 18 $\in$ ك

2) الخاصية الإبدالية:

إذا كان أ ، ب $\in$ ك فإن أ × ب = ب × أ

وبما أن أ × ب = ب + ب + ب + ... + ب (أ من المرات)

إذن : أ × ب = أ + أ + أ + ... + أ (ب من المرات)

مثال:

تحقق من صحة الخاصية الإبدالية فيما يأتي:

أ) $3 \times 6 = 6 \times 3$

ب) $2 \times 5 = 5 \times 2$

الحل :

أ) الطرف الأيمن $= 3 \times 6 = 6 + 6 + 6 = 18$

الطرف الأيسر $= 6 \times 3 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 18$

إذن: الطرفان متساويان.

ب) الطرف الأيمن $= 2 \times 5 = 5 + 5 = 10$

الطرف الأيسر $= 5 \times 2 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10$

إذن: الطرفان متساويان.

3) الخاصية التجميعية:

إذا كان أ ، ب ، حـ $\in$ ك فإن (أ × ب) × حـ = أ × (ب × حـ)

مثال:

تحقق من صحة الخاصية التجميعية فيما يأتي:

$(6 \times 3) \times 2 = 6 \times (3 \times 2)$

الحل:

الطرف الأيمن = $(6 \times 3) \times 2$

= 18×2

= 36

الطرف الأيسر = $6 \times (3 \times 2)$

= 6×6

= 36

إذن: الطرفان متساويان

4) خاصية العنصر المحايد في عملية الضرب على الأعداد الكلية:

يمثل العدد (1) عنصراً محايداً لعملية الضرب على مجموعة الأعداد الكلية.

إذ أنه إذا كان أ ∋ ك فإن أ × 1 = 1 × أ = أ

مثال:

تحقق من أن العدد (1) يمثل عنصراً محايداً في عملية الضرب للأعداد الكلية الآتية:

أ) 7 ب) 11

الحل:

أ) $1 \times 7 = 7 \times 1 = 7$

ب) $1 \times 11 = 11 \times 1 = 11$

5) خاصية توزيع عملية الضرب على عملية الجمع في مجموعة الأعداد الكلية:

إذا كان أ ، ب ، ج ∋ ك فإن أ × (ب + ج) = (أ × ب) + (أ × ج)

مثال:

تحقق من صحة الخاصية التوزيعية فيما يأتي:

$3 \times (5 + 4) = (3 \times 5) + (3 \times 4)$

الحل:

الطرف الأيمن = $3 \times (5 + 4)$

$= 3 \times 9$

$= 27$

الطرف الأيسر = $(3 \times 5) + (3 \times 4)$

$= 15 + 12$

$= 27$

إذن: الطرفان متساويان

6) خاصية الضرب في العدد صفر:

إذا كان أ ∋ ك ، فإن أ × صفر = صفر × أ = صفر

فمثلاً:

7 × صفر = صفر × 7 = صفر

(4.4.5) خصائص عملية القسمة على الأعداد الكلية:

إن عملية القسمة على الأعداد الكلية لا تحقق أياً من الخصائص السابقة التي حققتها عملية الضرب فهي:

1) ليست مغلقة:

فمثلاً ، إذا كان 6 ، 18 ∋ ك

فإن 6 ÷ 18 ∌ ك

2) ليست تبديلية:

فمثلاً، 24 ، 8 ∋ ك

⇐ 24 ÷ 8 ≠ 8 ÷ 24

إذ أن 24 ÷ 8 = 3

بينما 8 ÷ 24 ∌ ك

3) ليست تجميعية:

فمثلاً $(18 \div 6) \div 3 \neq 18 \div (6 \div 3)$

لأن الطرف الأيمن = $(18 \div 6) \div 3$

= $3 \div 3$

= 1

بينما الطرف الأيسر = $18 \div (6 \div 3)$

= $18 \div 2$

= 9

⇐ $1 \neq 9$

إذن: الطرفان غير متساويين

4) لا يوجد عنصر محايد في عملية قسمة الأعداد الكلية:

سؤال: لماذا لا يمكن اعتبار العدد (1) عنصراً محايداً في عملية قسمة الأعداد الكلية؟ وضح ذلك بمثال عددي.

ويوضح الجدول الآتي ملخصاً للعمليات الحسابية على ك وخصائص هذه العمليات:

الخاصية	(ك ، +)	(ك ، -)	(ك ، ×)	(ك ، ÷)
الانغلاق	✓	×	✓	×
الإبدالية	✓	×	✓	×
التجميعية	✓	×	✓	×
التوزيعية	×	×	تتوزع عملية الضرب على الجمع	×
المحايد	الصفر	×	(1)	×
النظير	×	×	×	×

ومن الجدول، يمكن ملاحظة أن خاصية النظير لا تتحقق لأي من العمليات الحسابية على ك ، ويمكن إيضاح ذلك في (ك، +) مثلاً:

فالعملية الثنائية (ك، +) لا تحقق خاصية النظير، لأنه لا يوجد عدد نظير ∈ ك بحيث أن العدد + النظير = المحايد الجمعي، أي أنه لا يوجد عدد كلي يحقق مثلاً 6 + النظير = صفر، وكذلك القول بالنسبة للعمليات الأخرى.

(5.5) خوارزميات العمليات:

يقصد بالخوارزمية الطريقة ذات الخطوات المحددة التي تؤدي إلى نتيجة رياضية معينة.

فلإيجاد 15 + 24 مثلاً ، يمكن اتباع عدة خوارزميات منها:

$$24 + 15 = (10+5) + (20+4) = (4+5) + (20+10)$$
$$= 9 + 30$$
$$= 39$$

وبصورة عمودية فإن:

$$\begin{array}{r} 15 \\ +\ 24 \\ \hline 9 \\ +\ 30 \\ \hline 39 \end{array}$$

ومن ثم:

عشرات	آحاد
1	5
2	4
3	9

أما الجمع بإعادة التجميع (الجمع بالحمل) فيظهر كالآتي:

$$\begin{array}{r} 28 \\ +\ 17 \\ \hline 15 \\ +\ 30 \\ \hline 45 \end{array}$$

أو

	عشرات	آحاد
1	2	8
	1	7
	4	5

وبذلك ودون كتابة أسماء المنازل فإن:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 28 \\ +\ 17 \\ \hline 45 \end{array}$$

ويراعى النهج نفسه في إجراء عملية الطرح كما المثال الآتي (56 – 29):

$$56 - 29 = (50 + 6) - (20 + 9)$$

$$= (40 + 16) - (20 + 9)$$

$$= (40 - 20) + (16 - 9)$$

$$= 20 + 7 = 27$$

والتي تظهر بصورة عمودية كالآتي:

$$\begin{array}{rr} 4 & 16 \\ \not{5} & \not{6} \\ -\ 2 & 9 \\ \hline 2 & 7 \end{array}$$

أي أننا استلفنا عشرة كاملة من منزلة العشرات لنتمكن من طرح العدد 9 من 16 بدلاً من طرح 9 من 6 لأن ذلك لا يجوز في ك.

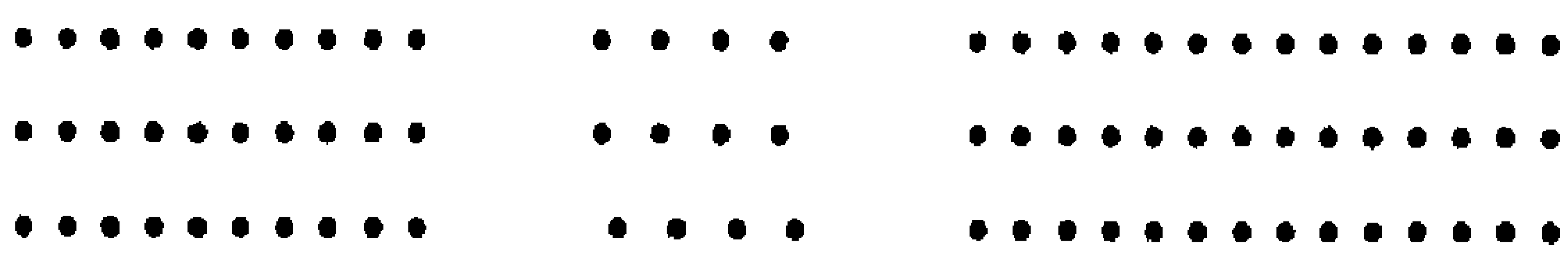
ولمناقشة خوارزميات الضرب نعرض المثال الآتي:

$$3 \times 14 = 3 \times (4 + 10)$$

$$= (3 \times 4) + (3 \times 10)$$

$$= 12 + 30$$

$$= 42$$



$$3 \times 14 = 42 \quad = \quad 3 \times 4 = 12 \quad + \quad 3 \times 10 = 30$$

ويصورة عمودية

$$\begin{array}{r} 14 \\ 3\times \\ \hline 12 \\ 30 \\ \hline 42 \end{array}$$

، ويصورة أخرى

$$\begin{array}{r} \overset{1}{1}4 \\ 3\times \\ \hline 42 \end{array}$$

وفيما يتعلق بخوارزمية القسمة عندما يكون الباقي مساوياً للصفر فإن

$$3 \times 14 = 42 \Leftarrow 42 \div 3 = 14 \text{ ، } 42 \div 14 = 3$$

أي في حالة 42 ÷ 14 نطرح 14 في كل مرّة وبذلك يكون عدد مرات طرح (14) من (42) ثلاث مرات، وعليه يكون الناتج مساوياً لـ (3).

$$\begin{array}{rl} 42 & \\ 14\ - & (1) \\ \hline 28 & \\ 14\ - & (1) \\ \hline 14 & \\ 14\ - & (1) \\ \hline 00 & \end{array} \quad \Big|\ \underline{14}$$

وقد سبق وأشرنا إلى خوارزمية القسمة بوجه عام، والتي يمكن من خلالها إجراء عملية القسمة مع وجود باقٍ.

فمثلاً:

$27 = (6 \times 4) + 3$ ، وبصورة أخرى $27 \div 6 = 4$ والباقي 3

ويظهر ذلك من خلال القسمة الطويلة كالآتي:

```
          06
       ______
  4   |  27
 _____|  00  -
        ______
         27
         24  -
        ______
         03
```

ويتضح من هذه القسمة استخدام الضرب والطرح للوصول إلى الناتج ، وهذا يدل على العلاقة الوثيقة بين العمليات الحسابية كما أسلفنا في رسم سابق .

(6.5) تمارين ونشاطات:

1. ضع إشارة (×) على رمز الإجابة الصحيحة في كل مما يلي:

1. المجموعة العددية التي تحقق خاصية الانغلاق تحت عملية الجمع فيما يلي هي :

أ) { 0 ، 2 ، 4 ، 6 ، ... }

ب) { 1 ، 3 ، 5 ، 7 ، ... }

ج) { 1 ، 2 ، 3 }

د) { 0 ، 2 ، 4 }

2. ناتج قسمة صفر ÷ 9 يساوي:

أ) 9

ب) صفر

ج) 1

د) كمية غير معرّفة .

3. يعد العدد (1) عنصراً محايداً لمجموعة الأعداد الكلية في عملية:

أ) الجمع

ب) الضرب

ج) الطرح

د) القسمة

4. ناتج جمع 3169 + 2473 =

أ) 5642

ب) 56412

ج) 5732

د) 5532

5. ناتج طرح 604 - 238 =

أ) 434

ب) 366

ج) 376

د) 374

6. ناتج ضرب 700 × 6 =

أ) 42

ب) 420

ج) 4200

د) 42000

7. ناتج قسمة 224 ÷ 7 =

أ) 33

ب) 32

ج) 34

د) 27

8. مجموعة الأعداد الكلية مغلقة تحت عملية :

أ) الجمع

ب) الطرح

ج) القسمة

د) غير ما ذكر

9. جميع الخصائص الآتية تتحقق في مجموعة الأعداد الكلية عدا واحدة هي:

أ) إبدالية الجمع

ب) إبدالية الضرب

ج) تجميعية الضرب

د) تجميعية الطرح

10.إذا كانت أ ، ب ، حـ $\ni$ ك، فإن أ ÷ ب = حـ بشرط :

أ) أ $\neq$ صفر

ب) ب $\neq$ صفر

ج) حـ $\neq$ صفر

د) ب ، حـ $\neq$ صفر

11.القيمة المنزلية للرقم (5) في العدد 4571 هي :

أ) 5

ب) 50

ج) 100

د) 400

12.(18 – 15 – 1) =

أ) 12

ب) 14

ج) 13

د) ليس لها جواب محدد

13. $(7-6)-2 \neq 2-(7-6)$ مثال على عدم صحة الخاصية:

أ) الانغلاقية

ب) الإبدالية

ج) التوزيعية

د) التجميعية

14. $(206 + 28) =$

أ) 486

ب) 2214

ج) 254

د) 234

15. $(73 \div 5)$ بموجب خوارزمية القسمة تساوي :

أ) 3 والباقي 8

ب) 14 والباقي 3

ج) 15 والباقي 2

د) 14

16. تنص خوارزمية القسمة على أنه لأي عدد أ $\in$ ك يوجد عدد

ب $\in$ ك*، حـ $\in$ ك بحيث أن :

أ) أ = ب × حـ + د : د > 0

ب) ب = أ × حـ + د : $0 \leq$ د $<$ ب

ج) أ = ب × حـ + د : $0 \leq$ د

د) أ = ب × حـ + د : $0 \leq$ د $<$ ب

17. (ك ، -) تحقق خاصية:

أ) الانغلاق

ب) التجميع

ج) المحايد

د) لا شيء مما ذكر

18. (ك * ، +) تحقق خاصية:

أ) المحايد

ب) النظير

ج) التوزيع

د) التجميع

19. $(9-3)\times 2 \div 1 =$

أ) 3

ب) 12

ج) 6

د) 18

20. تنص خاصية الانغلاق في (ك* ، ×) على أنه :

أ) لكل أ ، ب ∈ ك* فإن أ × ب = ب × أ

ب) لكل أ ، ب ∈ ك* فإن أ × ب ∈ ك*

ج) لكل أ ، ب ، حـ ∈ ك* فإن (أ × ب) × حـ = أ × (ب × حـ)

د) ناتج ضرب عددين كليين ∈ ك*

2. اكتب الرقم المناسب في المكان الفارغ لتصبح المسألة صحيحة

أ) 1 □ 4 □

× 6

---

1 4 8 8 6

ب) □ 6 □ □ □

- 6 □ 3

7678

ج) □ 5 6 □

+6 □ 8 5

3 8 □ 8

3. جد ناتج كل مما يلي:

أ) 4378

5093

+ 263595

ب) 231451

- 198257

ج) 928

× 6000

د) 86372

× 49

هـ) $52 \overline{)7844}$

و) $77 \overline{)5264}$

ز) $5 \overline{)463}$

ي) $4 \overline{)120}$

4. تحقق بأمثلة عددية من صحة أو عدم صحة كلٍّ مما يأتي:

أ) الخاصية الابدالية في الجمع على ط

ب) خاصية توزيع الضرب على الجمع في ط

ج) خاصية الانغلاق في عملية القسمة على ط

5. بّين أي المجموعات الآتية مغلقة تحت عملية الجمع ثم تحت عملية الضرب وأيها غير مغلقة تحت كل من هاتين العمليتين :

أ) س = { 0 ، 1 ، 2 }

ب) ص = { 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، ... }

ج) ع = { 2 ، 4 ، 6 }

6. سمّ الخاصية المستخدمة في كل مما يأتي :

أ) $3 \times 8 = 8 \times 3$

ب) $(1 \times 5) + (3 \times 5) = (1 + 3)\,5$

ج) $3 = 3 \times 1 = 1 \times 3$

د) $8 = 8 + 0 = 0 + 8$

هـ) $(2 + 8) + 9 = 2 + (8 + 9)$

7. أعطِ مثالاً يبين أن الطرح غير تجميعي في ك .

8. اكتب قيمة الرقم الذي تحته خط في كل مما يأتي :

أ) $89\underline{4}0$

ب) $6\underline{5}00137$

ج) $568\underline{0}10$

9. أ) كوّن أكبر عدد كلي من الأرقام : 6 ، 4 ، 2 ، 3 ، 9

ب) كوّن أصغر عدد كلي من الأرقام : 1 ، 5 ، 7 ، 8 ، 6 ، 4

10. أ) اذكر إحدى المسلمات العامة لإقليدس .

ب) اذكر المسلمة التي تشير إلى الجمع من مسلمات بيانو .

11. أ) وضح العلاقة بين الجمع والطرح .

ب) فسّر العبارة الآتية:"العلاقة بين الطرح والضرب علاقة عكسية غير مباشرة".

12. أوجد 86×9 بثلاثة طرق مختلفة ومتدرجة .

13. وزّع رجل الناتج السنوي لـ 652 دونماً على أبنائه الأربعة ، فإذا كان معدل الناتج السنوي للدونم الواحد 27 ديناراً ، فما نصيب كل واحد من أبنائه ؟

14. تقطع شاحنة مسافة قدرها 255 كيلو متراً في 5 ساعات. أوجد المسافة التي تقطعها تلك الشاحنة في 4 ساعات ؟

15. يمكن تغطية لوحة مربعة الشكل بعدد من البطاقات المربعة، طول ضلعها 6 سم، كما يمكن تغطية اللوحة نفسها ببطاقات مربعة طول ضلعها 8 سم، فإذا كان عدد البطاقات في الحالتين عدداً صحيحاً فما أقل طول لضلع اللوحة؟

الفصل السادس

مفاهيم ونظريات أساسية في نظرية الأعداد

مفاهيم ونظريات أساسية في نظرية الأعداد

(1.6) مقدمة:

يعد موضوع نظرية الأعداد من الموضوعات الهامة في الرياضيات، والتي تهتم بشكل رئيس بالعلاقات بين الأعداد الصحيحة، ويتناول هذا الفصل أهم العلاقات الأساسية بين الأعداد والتي تهتم بها نظرية الأعداد من مثل: مضاعفات الأعداد وقواسمها (عواملها)، وقابلية القسمة وقواعدها، والأعداد الأولية والتحليل إلى العوامل الأولية، ومن ثم القاسم المشترك الأكبر والمضاعف المشترك الأصغر.

وسيقتصر هذا الفصل على المفاهيم والنظريات الأساسية التي تصدق على مجموعة الأعداد الكلية، لارتباط هذه المجموعة العددية بما يدرّس من أعداد وعمليات عليها في الصفوف الابتدائية الأولى من التعليم الأساسي.

(2.6) المضاعفات والقواسم (العوامل):

(1.2.6) المضاعفات:

لاحظ أن $15 = 3 \times 5 = 5 \times 3$

يعتبر العدد (15) مضاعفاً للعدد 3 لأن العدد (15) يحوي 5 ثلاثات، وكذلك فإن العدد(15) مضاعف للعدد 3 لأنه يحوي 3 خمسات.

إذن العدد 15 هو مضاعف لكل من العددين3، 5.

أي أن: ناتج ضرب عددين هو مضاعف لكل منهما.

ملاحظات هامة:

1) كل عدد هو مضاعف لنفسه

فمثلاً: العدد 12 هو مضاعف للعدد 12، لأن 12=12 × 1، كذلك العدد 4 مضاعف للعدد 4 ، ...وهكذا.

2) الصفر هو مضاعف لأي عدد لأن 0 = 0 × 5 ، 0 = 0 × 13

(2.2.6) القواسم:

لاحظنا مما سبق أن العدد 15 هو مضاعف للعدد 3

لأن 15= 3 × 5

ويسمى العدد 3 قاسم للعدد 15

(15 ÷ 3 = 5 والباقي صفر)

كذلك العدد 5 هو قاسم للعدد 15

(15 ÷ 5 = 3 والباقي صفر)

أي أن: قاسم عدد ما هو العدد الذي يقسم العدد المعطى دون باقٍ

ويسمى القاسم أيضاً بالعامل ، أي أن مجموعة قواسم عدد، هي مجموعة عوامل ذلك العدد.

فمثلاً: الأعداد 1، 3، 5، 15 هي قواسم للعدد 15

تدريب:

- ما هو العدد المضاعف لأي عدد؟
- ما هو العدد القاسم لأي عدد؟

(3.6) قابلية القسمة:

(1.3.6) مفهوم قابلية القسمة:

إذا كان أ، ب عددين كليين، بحيث ب ≠ صفر، نقول أن أ يقبل القسمة على ب أو ب يقسم أ وتكتب ب | أ، إذاً وإذاً فقط وجد عدد صحيح وحيد حـ ∈ ك بحيث أن أ = حـ× ب.

ويمكن القول أن: ب قاسم (عامل) من عوامل أ، او أ مضاعف من مضاعفات ب.

فمثلاً : 3 تقسم 15 وتكتب 3 | 15 ، لأن 15= 5 × 3 ، أي ان 15 تقبل القسمة على 3.

كذلك 4 تقسم 12 وتكتب 4 | 12 لأن 12= 3 × 4، أي أن 12 تقبل القسمة على 4.

أما 2 فلا يقسم 5، لأنه لا يوجد عدد جـ ∈ ك بحيث أن 5 = 2× حـ.

لاحظ أنه عند قسمة عدد على آخر، إذا كان الباقي صفراً فإننا نقول: أن العدد الأول يقبل القسمة على العدد الثاني، لأن العدد الأول من مضاعفات العدد الثاني، وإذا كان الباقي ليس صفراً فإن العدد الأول لا يقبل القسمة على العدد الثاني.

ولهذا، فإن العدد 36 يقبل القسمة على 2، بينما العدد 37 لا يقبل القسمة على 2.

مثال:

بيّن اي العبارات الآتية صحيحة وأيها خطأ مع توضيح الإجابة.

أ. 3|12
ب. صفر| 8
ج. 3 | 3
د. صفر | صفر

الحل:

ا) 3 | 12 عبارة صحيحة ، لأنه يوجد عدد كلي وحيد حـ بحيث أن

12 = 3 × حـ ، حـ = 4 .

ب) صفر | 8 عبارة خاطئة، لأنه لا يمكن إيجاد عدد كلي وحيد حـ بحيث أن:

8 = صفر × حـ ، وعليه لا يعتبر العدد صفر قاسماً لأي عدد ∋ ك.

ج) 3 | 3عبارة صحيحة ، لأنه يوجد عدد كلي وحيد حـ بحيث:

3 =3× حـ ، حـ =1 .

د) صفر | صفر عبارة خاطئة ، لأنه لا يوجد عدد كلي وحيد حـ بحيث صفر= صفر× حـ ، بمعنى 0 لا يقسم 0 لوجود عدد لا نهائي من الإجابات مثل:

$0 \times 5 = 0$ ، $0 \times 100 = 0$ ، ... وهكذا.

(2.3.6) نظريات في قابلية القسمة:

نظرية (1): إذا كان أ | ب ، أ | حـ فإن أ | ب + حـ

مثال:

إذا كان 2 | 4 ، 2 | 10 فإن 2 | 4 + 10

أي أن 2 | 14

نظرية (2): إذا كان أ | ب ، حـ ∈ ك فإن أ | ب × حـ

مثال:

إذا كان 2 | 6 ، 3 ∈ ك فإن 2 | 6 × 3

أي أن 2 | 18

نظرية (3): إذا كان أ | ب ، ب | حـ فإن أ | حـ

مثال:

إذا كان 8 | 16 ، 16 | 48 فإن 8 | 48

وبالاستعانة بعدد من الأمثلة في ك يمكنك أن تلاحظ أن :

أ | أ لكل أ ∈ ك*، أي أن علاقة "يقسم" علاقة انعكاسية في ك*، لكن إذا كان أ | ب فليس شرطاً أن ب | أ ، أي أن علاقة "يقسم" ليست تماثلية ،

وتعد علاقة "يقسم" علاقة متعدية كما توضح نظرية (3) .

وعليه فإن علاقة " يقسم" ليست علاقة تكافؤ.

(4.6) قواعد قابلية القسمة:

لو تساءلنا ما الأعداد من (صفر إلى 11) التي تقسم العدد 7621934905872؟

سنجد أنفسنا في موقف صعب إذا أجرينا القسمة الطويلة على كل من صفر، 1، 2، ... وهكذا.

إذن لابد من مجموعة من القواعد تساعدنا في الإجابة السريعة عن السؤال السابق. وهذه القواعد هي على النحو التالي:

(1) قابلية القسمة على 2:

يقبل العدد القسمة على 2 إذاً وإذاً فقط كان آحاده عدداً زوجياً .

فمثلاً: الأعداد 12، 170، 1854، تقبل القسمة على 2 لأن آحاد كل منها عدداً زوجياً.

بينما الأعداد 113 ، 185 ، 27 لا تقبل القسمة على 2.

(2)قابلية القسمة على 3:

يقبل العدد القسمة على 3 إذاً وإذاً فقط كان مجموع أرقامه من مضاعفات العدد 3.

فمثلاً: العدد 5154 يقبل القسمة على 3، لأن مجموع أرقامه 4+5+1+5=15 وهو من مضاعفات العدد 3.

$77\not{7}$

$-77 \quad (2 \times 7) = -77 \quad 14 = 63$ والذي يقبل القسمة على 7

(7) قابلية القسمة على8:

يقبل العدد القسمة على 8 إذاً وإذاً فقط كان العدد المكون من آحاده وعشراته ومئاته يقبل القسمة على 8.

فمثلاً: العدد 59160 يقبل القسمة على 8 لأن 160 يقبل القسمة على 8 ، كذلك، العدد 1000 يقبل القسمة على 8 لأن صفر يقبل القسمة على 8 أي $8|0$.

(8) قابلية القسمة على 9:

يقبل العدد القسمة على 9 إذاً وإذاً فقط كان مجموع أرقامه يقبل القسمة على 9.

فمثلاً: العدد 2151 يقبل القسمة على 9 لأن مجموع أرقامه:

$1+5+1+2 = 9$ وهو يقبل القسمة على 9 .

كذلك، العدد 2385 يقبل القسمة على 9 لأن مجموع أرقامه $5+8+3+2 = 18$ وهو يقبل القسمة على 9.

(9)قابلية القسمة على 10:

يقبل العدد القسمة على 10إذاً وإذاً فقط كان رقم آحاده صفراً .

فمثلاً: الأعداد 500 ، 1230 ، 320 ، 10000 ، 53540 تقبل القسمة على 10 لأن آحادها صفراً.

سؤال:

في المثال السابق ، هل تقبل الأعداد 500 ، 1230 ، 320 ، 10000 ، 53540 القسمة على 2، 5؟ ماذا يمكن أن تستنتج؟

(10)قابلية القسمة على 11:

يقبل العدد القسمة على 11 إذاً وإذاً فقط كان العدد الناتج من طرح مجموع أرقامه ذات الترتيب الفردي من مجموع أرقامه ذات الترتيب الزوجي (أو العكس) يقبل القسمة على 11.

فمثلاً: العدد 727584 يقبل القسمة على 11 بتطبيق القاعدة كالآتي:

مجموع الأرقام ذات الترتيب الفردي : 4+5+2= 11

مجموع الأرقام ذات الترتيب الزوجي : 8+7+7= 22

⇐ 22 – 11 = 11 ⇐ يقبل القسمة على 11

تدريب:

هل العدد 121121 يقبل القسمة على 11 ؟ وضح إجابتك .

سؤال:

لعلك لاحظت عدم التعرض في قواعد قابلية القسمة إلى قابلية القسمة على 0، 1 (لماذا؟)

(5.6) الأعداد الأولية:

إذا استعرضنا الجدول الآتي الذي يبينْ مجموعة قواسم الأعداد من (1) إلى (10) :

العدد	مجموعة القواسم
1	{ 1 }
2	{ 2 ، 1 }
3	{ 3 ، 1 }
4	{ 4 ، 2 ، 1 }
5	{ 5 ، 1 }
6	{ 6 ، 3 ، 2 ، 1 }
7	{ 7 ، 1 }
8	{ 8 ، 4 ، 2 ، 1 }
9	{ 9 ، 3 ، 1 }
10	{ 10 ، 5 ، 2 ، 1 }

فإننا نلاحظ أن:

العدد 1 يقبل القسمة على نفسه فقط

والعدد 2 يقبل القسمة على نفسه وعلى العدد 1

والعدد 3 يقبل القسمة على نفسه وعلى العدد 1

والعدد 4 يقبل القسمة على نفسه وعلى العدد 1 وعلى العدد 2

وهكذا...

ولعلك لاحظت أيضاً أن كلاً من الأعداد 2 ، 3 ، 5 ، 7 لا يقبل القسمة إلا على نفسه وعلى الواحد الصحيح.

وتسمى مثل هذه الأعداد أعداداً أولية.

أي أن العدد الأولي هو أي عدد أكبر من 1 ولا يقبل القسمة إلا على نفسه وعلى العدد 1 .

بمعنى (العدد الأولي له قاسمان (عاملان) مختلفان فقط هما العدد نفسه والواحد الصحيح).

مثال (1):

اكتب الأعداد الأولية المحصورة بين 1، 20

الحل:

2 ، 3، 5 ، 7 ، 11 ، 13 ، 17 ، 19

سؤال: ما هو العدد الأولي الوحيد في مجموعة الأعداد الزوجية ؟

مثال(2): هل العدد (8) عدد أولي ؟

الحل:

العدد 8 ليس عدداً أولياً لان له عدة عوامل هي 1 ، 2 ، 4 ، 8.

(6.6) التحليل إلى العوامل الأولية:

(1.6.6) مفهوم التحليل إلى العوامل الأولية:

عند إيجاد قواسم العدد 24 نجد أنها: 1، 2، 3، 4، 6، 8، 12 ، 24 ، وبإمكاننا كتابة العدد 24 بعدة أشكال كناتج ضرب عددين كالآتي:

(قواسمه):

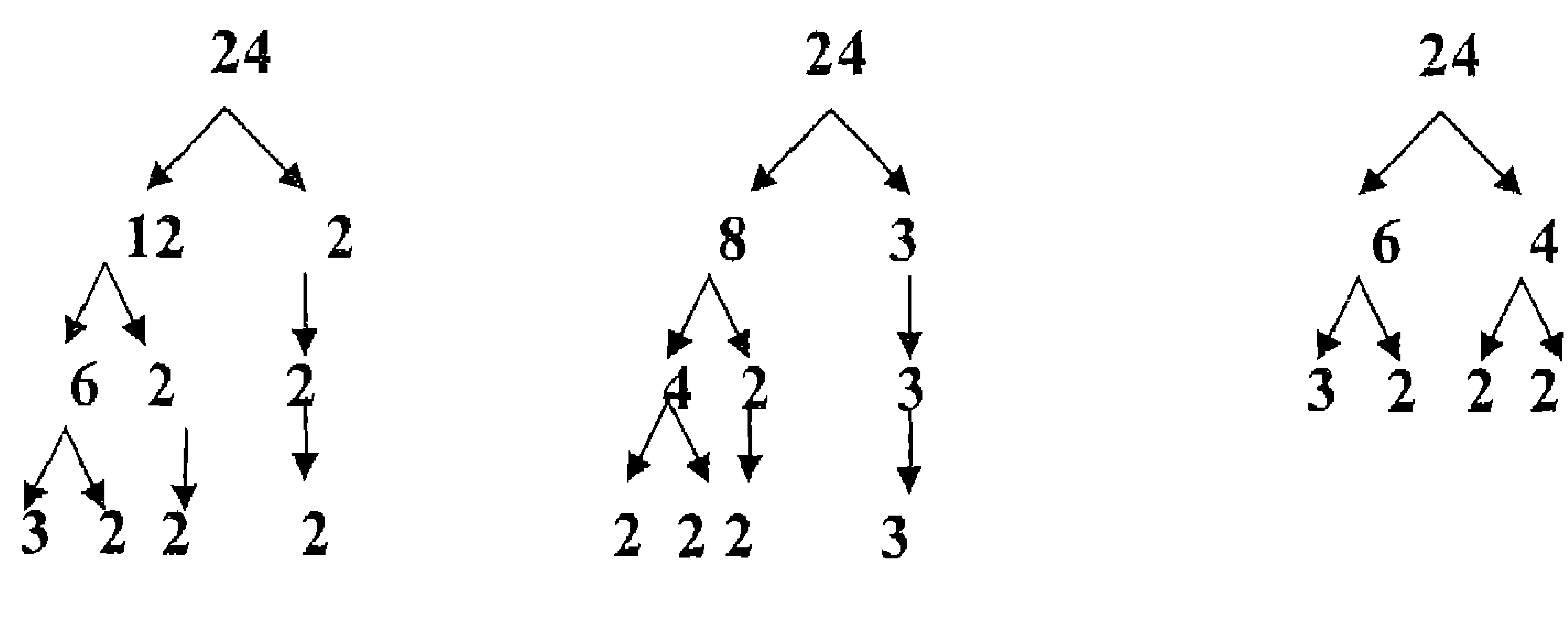
$$6 \times 4 = 24$$

$$8 \times 3 = 24$$

$$12 \times 2 = 24$$

$$24 \times 1 = 24$$

لاحظ أننا كتبنا العدد 24 كناتج ضرب عاملين من عوامله ، ولكن ماذا لو حللنا العدد 24 بالطريقة الآتية:



$3\times2\times2\times2=24$ $2\times2\times2\times3=24$ $3\times2\times2\times2=24$

لاحظ أننا في كل مرة كوّنا شجرة ، فروعها هي العوامل الأولية للعدد 24 حيث تؤدي جميع التفرعات في الشجرات الثلاث إلى النتيجة ذاتها ، والاختلاف الوحيد بين الأعداد السفلى في الشجرات الثلاث هو في الترتيب فقط ، فعلى الرغم من أن العدد 24 له عوامل عدة هي : 1 ،2، 3، 4، 6، 8، 12، 24 إلا أن هذه العوامل لا تعتبر تحليلاً أولياً للعدد 24 .

أما إذا أردنا التحليل الأولي للعدد 24 فهو كالآتي:

$24 = 2\times2\times2\times3$، وبغض النظر عن ترتيب هذه العوامل الأولية فإن هذا التحليل وحيد.

(2.6.6) النظرية الأساسية في الحساب:

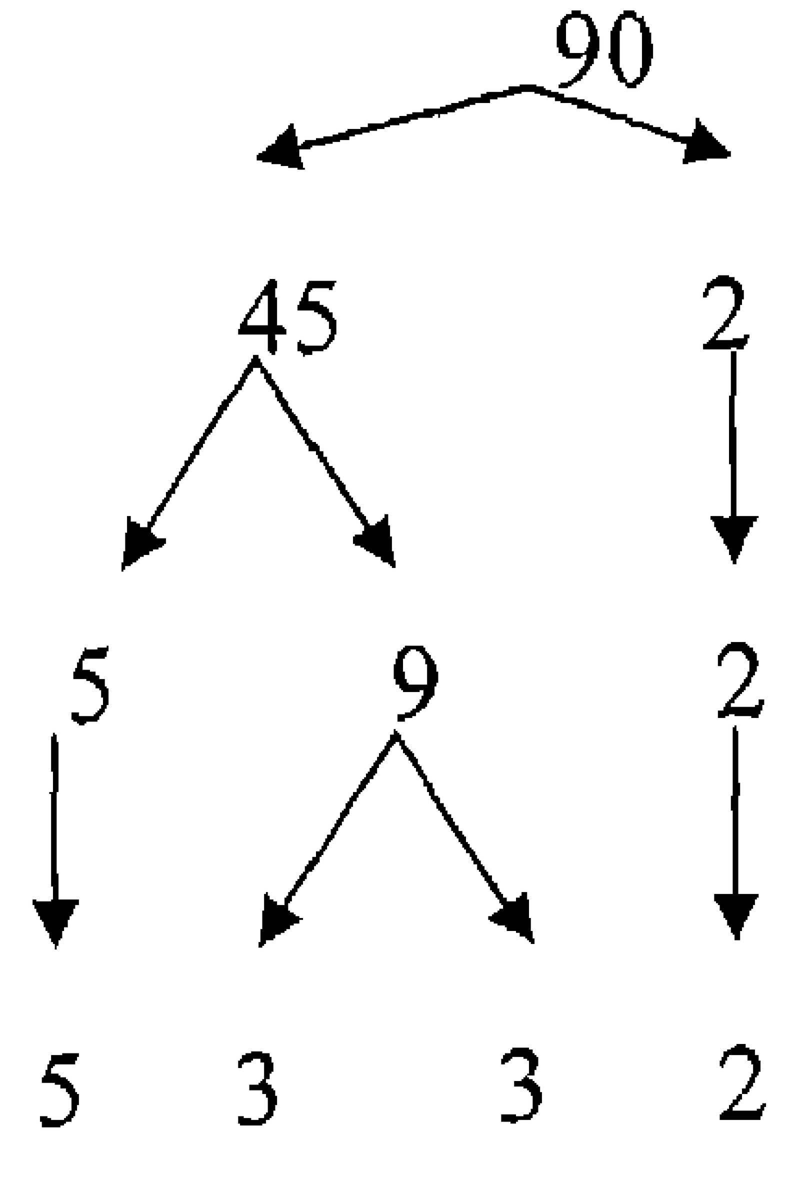
كل عدد غير أولي يمكن أن يكتب كحاصل ضرب عوامله الأولية بطريقة وحيدة، بغض النظر عن ترتيب العوامل في هذا التحليل.

مثال:

حلل الأعداد الآتية إلى عواملها الأولية باستخدام طريقة الشجرة.

أ) 90 ب) 7

الحل :



أ) $90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5$

ب) العدد 5 أولي فليس له عامل أولي غير نفسه .

والتمثيل الشجري 5 ليس ذي فائدة لان العدد 5 لا يوجد له تفرع

1 5

عند الانتقال منه إلى عامله الأولي الوحيد 5، ولذا نكتب 5

↓

5

◆ طريقة التحليل إلى العوامل الأولية:

يبين الشكل المختزل الآتي طريقة تحليل العدد (90) في المثال السابق إلى عوامله الأولية:

العدد	قواسم العدد الأولية
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

$90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5$

مثال:

حلل الأعداد الآتية إلى عواملها الأولية:

أ) 81 ب) 144

الحل :

أ)

$3\times3\times3\times3 = 81$

العدد	قواسم العدد الأولية
81	3
27	3
9	3
3	3
	1

ب) $3\times3\times2\times2\times2\times2 = 144$

العدد	قواسم العدد الأولية
144	2
72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	

(7.6) قوة العدد:

تعلم أن العدد $81 = 3\times3\times3\times3$

ويمكن كتابة هذه العوامل بالطريقة الآتية: $81 = 3^4$ وتقرأ (3 أس 4) ويسمى العدد 3 (الأساس).

كذلك، $32 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

$32 = 2^5$ (2 أس 5)

يسمى العدد 81: القوة الرابعة للعدد 3 لأنه يساوي 3^4

ويسمى العدد 32 القوة الخامسة للعدد 2 لأنه يساوي 2^5

مثال:

حلل كلا من الأعداد الآتية إلى عوامله الأولية واكتب الناتج بصورة قوى

أ) 50 ب) 24

الحل :

أ) $50 = 5 \times 5 \times 2$

$50 = 5^2 \times 2^1$

$50 = 5^2 \times 2$

50	2
25	5
5	5
1	

ب) $24 = 3 \times 2 \times 2 \times 2$

$= 3^1 \times 2^3$

$= 3 \times 2^3$

24	2
12	2
6	2
3	3
1	

(8.6) القاسم المشترك الأكبر:

القاسم المشترك الأكبر لعددين كليين هو أكبر قاسم أو عامل يقسم العددين معاً، أي أنه أكبر عنصر في مجموعة قواسمهما المشتركة.

فمثلاً:

أ = مجموعة قواسم العدد 8 وهي { 1، 2، 4 ، 8 }

ب = مجموعة قواسم العدد 12 وهي { 1، 2، 3 ، 4 ، 6 ، 12 }

تلاحظ أن مجموعة الأعداد { 1، 2، 4 } هي مجموعة القواسم المشتركة للعددين 8 ، 12 ، أي أن أ ∩ ب = { 1، 2، 4 } ويسمى كلاً من هذه الأعداد قاسماً مشتركاً للعددين.

إن أكبر هذه القواسم المشتركة هو العدد 4 ويسمى القاسم المشترك الأكبر للعددين 8 ، 12 ويرمز له بالرمز ق . م . أ (8 ، 12) = 4

ويمكن إيجاد ق . م . أ للعددين من خلال التحليل إلى العوامل الأولية كالآتي:

8	2
4	2
2	2
1	

12	2
6	2
3	3

$$8 = \boxed{2 \times 2} \times 2 = 2^3$$

$$12 = \boxed{2 \times 2} \times 3 = 2^2 \times 3$$

لاحظ أن $\boxed{2\times2}$ هي القاسم المشترك الأكبر بين 8، 12

أي أن القاسم المشترك الأكبر للعددين 8 ، 12 هو حاصل ضرب العوامل المشتركة بأصغر أس أو هو أصغر قوة مشتركة بين العددين.

مثال:

جد القاسم المشترك الأكبر لكل مما يأتي:

أ) 54 ، 90

ب) 20 ، 36 ، 18

ج) 21 ، 8

الحل:

أ) $54 = \boxed{2\times3\times3} \times 3 = 2 \times 3^3$

$90 = \boxed{2\times3\times3} \times 5 = 2 \times 3^2 \times 5$

حيث أن:

54	
54	2
27	3
9	3
3	3
1	

90	
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

ق . م . أ (54، 90) $= 2 \times 3^2 = 18$

ب) $20 = 2 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 5$

$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^2 \times 3^2$

$18 = 2 \times 3 \times 3 = 2 \times 3^2$

ق . م . أ (20 ، 36 ، 18) = 2

حيث أن:

20	2
10	2
5	5
1	

36	2
18	2
9	3
3	3
1	

18	2
9	3
3	3
1	

ج) $21 = 3 \times 7 = 3 \times 7 \times 1$

$8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3 \times 1$

ق . م . أ (21 ، 8) = 1

حيث أن:

21	3
7	7
1	

8	2
4	2
2	2
1	

ملاحظة: إذا كان ق . م . أ لعددين = 1 ، فإن العددين أوليين فيما بينهما (Coptime).

(9.6) المضاعف المشترك الأصغر:

المضاعف المشترك الأصغر لعددين كليين هو أصغر عدد كلي يقبل القسمة على العددين معاً، أي أنه أصغر عنصر في مجموعة مضاعفاتهما المشتركة.

فمثلاً :

مجموعة مضاعفات العدد 8 هي { 0 ، 8 ،16 ، 24 ،32 ،40 ، 48 ،... }

مجموعة مضاعفات العدد 12 هي { 0 ، 12 ، 24 ، 36 ، 48 ، ...}

وبما أن العدد صفر هو مضاعف لأي عدد طبيعي فوجوده لا يهمنا في مجموعة مضاعفات العدد ، ولذا نبدأ مضاعفات العدد بالعدد نفسه.

ولهذا يمكن إعادة كتابة المجموعتين السابقتين كالآتي:

أ = مجموعة مضاعفات العدد 8 وهي {8، 16، 24، 32، 40، 48... }

ب = مجموعة مضاعفات العدد 12 وهي { 12 ، 24 ،36 ، 48 ،... }

ولعلك تلاحظ أن بعض هذه المضاعفات هي مضاعفات مشتركة للعددين 8 ، 12 ، مثل : 24 ، 48 ، ... أي أن أ ∩ ب = { 24 ، 48 ، ... }.

ويسمى كلٌ من هذه الأعداد مضاعفاً مشتركاً للعددين، وأصغر هذه المضاعفات المشتركة هو العدد 24، ويسمى المضاعف المشترك الأصغر للعددين 8،12

ويرمز له بالرمز م. م.أ (8، 12) = 24

ويمكن إيجاد م . م . أ للعددين من خلال التحليل إلى العوامل الأولية كالآتي:

$$8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$$

$$12 = 3 \times 2 \times 2 = 2^2 \times 3$$

لاحظ أن $2^3 \times 3 = 3 \times 8 = 24$ هو المضاعف المشترك الأصغر للعددين 8، 12.

أي أن المضاعف المشترك الأصغر للعددين 8 ، 12 هو حاصل ضرب جميع العوامل الأولية المختلفة بأكبر أس أو بأكبر قوة.

مثال:

جد المضاعف المشترك الأصغر فيما يلي :

أ) 24 ، 30

ب) 12 ، 18 ، 30

الحل:

أ) $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^3 \times 3^1$

$30 = 2 \times 3 \times 5 = 2^1 \times 3^1 \times 5^1$

م . م . أ $(24 ، 30) = 2^3 \times 3^1 \times 5^1$

$= 8 \times 3 \times 5 = 120$

حيث أن:

24	2
12	2
6	2
3	3
1	

30	2
15	3
5	5
1	

ب) $12 = 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3^1$

$18 = 2 \times 3 \times 3 = 2^1 \times 3^2$

$30 = 2 \times 3 \times 5 = 2^1 \times 3^1 \times 5^1$

م . م . أ $(12 ، 18 ، 30) = 2^2 \times 3^2 \times 5^1$

$= 4 \times 9 \times 5 = 180$

12	2
6	2
3	3
1	

18	2
9	3
3	3
1	

30	2
15	3
5	5
1	

ويمكن إيجاد م . م . أ بطريقة التحليل المشترك كالآتي:

لإيجاد م . م . أ للعددين 18 ، 12 يمكن الاستعانة بالشكل الآتي:

	12	18
2	6	9
3	2	3
2	1	↓
3	↓	3
	1	1

يمكنك ملاحظة أننا أوجدنا القواسم المشتركة ثم تابعنا عملية القسمة بغض النظر عن قابلية العدد المجاور للقسمة أو لا .

وعليه فإن م . م . أ = $2 \times 3 \times 2 \times 3 = 36$

كذلك يمكن استخدام هذه الطريقة في إيجاد ق . م . أ أيضاً .

مثال:

أوجد ق . م . أ ، م . م . أ للعددين 21 ، 24

الحل:

لإيجاد ق . م . أ انظر التحليل المجاور:

	24	21
3	8	7

إذن ق . م . أ = 3

ولإيجاد م . م . أ انظر التحليل المجاور :

	4	21
3	8	7
8	1	(7)
7	(1)	1

إذن م . م . أ = $3 \times 8 \times 7 = \mathbf{168}$

تدريب:

في المثال السابق، جد ناتج ق . م . أ × م . م . أ

ثم جد ناتج 21×24 ، ماذا تلاحظ ؟

(10.6) المجموعات الرئيسة لمجموعة الأعداد الكلية:

تعلم أن مجموعة الأعداد الكلية ك = {0 ، 1 ، 2 ، 3 ،...}، وأنه يمكن الحصول على مجموعات جزئية منها مثل أ = { 0 ، 1 ، 2 ، ... ، 9 } وهي مجموعة أرقام النظام العددي العشري، كذلك ل = { 2 ، 3 ، 5 ، 7 ، 11 ، ... } وهي مجموعة الأعداد الأولية ، كما أن ز = {0 ، 2 ، 4 ، 6، ...}، ف = {1 ، 3 ، 5 ، ... } مجموعتان جزئيتان منها.

وبالنظر إلى ز نجد أن أعدادها زوجية، بينما أعداد المجموعة ف فردية، وكتعريف:

م عدد زوجي إذاً وإذاً فقط كان م = 2ن : ن ∈ ك

م عدد فردي إذاً وإذاً فقط كان م = 2ن + 1 ؛ 2ن ∈ ك

ومن الواضح أن العدد الزوجي هو العدد الذي يقبل القسمة على (2) مثل: 0 ، 6 ، 8 وغيرها.

بينما العدد الفردي هو العدد الذي لا يقبل القسمة على (2) دون باقٍ مثل: 1 ، 3 ، 5 وغيرها.

كما أنه للحصول على عدد فردي يكفي أن تضيف واحداً لأي عدد زوجي.

ومن النظريات الأساسية على هاتين المجموعتين العدديتين:

عدد زوجي + عدد زوجي = عدد زوجي

عدد فردي + عدد فردي = عدد زوجي

عدد فردي + عدد زوجي = عدد فردي

ويمكن استقراء هذه النظريات من خلال الأمثلة، على أن لا يقل عدد الأمثلة لكلّ منها عن ثلاثة.

(11.6) تمارين ونشاطات:

1. ضع إشارة (×) على رمز الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

1. يقبل العدد (س21) القسمة على 3 إذا كانت س =

أ) 1

ب) 2

ج) 3

د) 4

2. يقبل العدد (ع5143) القسمة على 5 إذا كانت ع =

أ) صفر

ب) 2

ج) 3

د) 4

3. أحد هذه الأعداد مضاعف للعدد 7:

أ) 24

ب) 32

ج) 49

د) 53

4. أحد هذه الأعداد قاسم من قواسم العدد 19:

أ) 9

ب) 2

ج) 8

د) 19

5. العدد الذي يقبل القسمة على كل من 5 ، 2 معاً هو:

أ) 450

ب) 782

ج) 945

د) 574

6. القاسم المشترك الأكبر للعددين 9 ، 22 يساوي:

أ) 1

ب) 3

ج) 2

د) صفر

7. المضاعف المشترك الأصغر للعددين 8 ، 16 هو:

أ) 8

ب) 16

ج) 32

د) 128

8. المضاعف المشترك الأصغر لعددين أوليين س ، ص هو:

أ) س

ب) ص

ج) 1

د) س × ص

9. العدد الأولي مما يأتي هو:

أ) 39

ب) 93

ج) 84

د) 53

10. يقبل العدد 824 س 53 القسمة على 11 إذا كانت س =

أ) 4

ب) 6

ج) 8

د) 9

11. إذا كان أ ، ب عددين أولين فيما بينهما، فإن القاسم المشترك الأكبر لهما هو:

أ) أ

ب) ب

ج) 1

د) أ × ب

12. يقبل العدد 483725 القسمة على:

أ) 2

ب) 3

ج) 4

د) 11

13. إذا كان ق . م . أ للعددين س ، ص = 1 فإن

أ) س = ص

ب) س مضاعف من مضاعفات ص

ج) ص مضاعف من مضاعفات س

د) ص عامل من عوامل س

14. الأعداد الأولية هي مجموعة جزئية من مجموعة :

أ) الأعداد الصحيحة السالبة

ب) الأعداد الزوجية

ج) الأعداد الكلية

د) الأعداد الفردية

15. التحليل الأولي للعدد 12 هو

أ) 4×3

ب) 2×6

ج) $2\times6\times1$

د) $3\times2\times2$

16. العدد الأولي مما يأتي هو:

أ) 1

ب) 72

ج) 17

د) 9

17. العدد 18 هو عدد:

أ) فردي

ب) أولي

ج) زوجي

د) لا شيء مما ذكر

18. أصغر عدد أولي في ك هو:

أ) 1

ب) 2

ج) $^{-}2$

د) 3

19. علاقة " يقسم " ليست علاقة تكافؤ لأنها لا تحقق :

أ) التعدي

ب) التماثل

ج) الانعكاس

د) جميع ما ذكر

20. إذا كان س مضاعف من مضاعفات ص فإن م . م . أ للعددين س، ص هو :

أ) س ص

ب) س

ج) ص

د) س + ص

2. بين صحة أو خطأ العبارات الآتية ، مع إيضاح ذلك بالأمثلة:

أ. إذا كان العدد يقبل القسمة على 2 ويقبل القسمة على 5 فإنه يقبل القسمة على 10

ب. العدد الذي يقبل القسمة على 10 يقبل القسمة على 2

ج. العدد الذي يقبل القسمة على 5 يقبل القسمة على 10

د. العدد الذي يقبل القسمة على 2 يقبل القسمة على 6

هـ. العدد الذي يقبل القسمة على 6 يقبل القسمة على 3

و. العدد الذي يقبل القسمة على 3 يقبل القسمة على 9

3. اي الأعداد الآتية يقبل القسمة على 5 ، ولماذا؟

3400 ، 120 ، 344 ، 132 ، 125

4. اي الأعداد الآتية يقبل القسمة على 9 ، ولماذا ؟

1032 ،666 ، 900 ، 324 ، 143

5. اي الأعداد الآتية يقبل القسمة على 5 ، 10 معاً ، ولماذا؟

122 ، 3435 ،6500 ، 340 ، 255

6. استخدم الأرقام من صفر إلى 9 لتكوين أعداد تقبل القسمة على

11 ، 8 ، 7 ، 6 ، 4 ، 3 ، 2

7. أ) ناقش قابلية قسمة العدد 348 على كلٍ من الأعداد

صفر، 1 ، 2 ، ... ، 11

ب) اوجد قواسم العدد (5671205846) الأصغر من العدد 10

8. اكتب ثلاثة أعداد تقبل القسمة على كل من:

11 ، 10 ، 9 ، 8 ، 7 ، 6 ، 5 ، 4 ، 3 ، 2

9. حلل الأعداد الآتية إلى عواملها الأولية باستخدام طريقة الشجرة:

120 ، 69 ، 850 ، 144

10. حلل الأعداد الآتية إلى عواملها الأولية واكتب الناتج على شكل قوى:

272 ، 130 ، 320 ، 25

11. استخدم قابلية القسمة لتحليل كل من الأعداد الآتية إلى عواملها الأولية:

81 ، 95 ، 32 ، 100

12. جد القاسم المشترك الأكبر (ق . م . أ) للأعداد الآتية:

أ) 56 ، 8

ب) 24 ، 14

ج) 180 ، 120

13. بين صحة أو خطأ العبارات الآتية مع التبرير:

أ) إذا كان ق . م . أ للعددين س ، ص = 1 فإن س ، ص عددان زوجيان

ب) إذا كان ق . م . أ للعددين أ ، ب = 1 فإن أ ، ب عددان أوليان

ج) القاسم المشترك الأكبر للعددين 7 ، 14 هو العدد 2

د) القاسم المشترك الأكبر للعددين 6 ، 12 هو العدد 6

14. إذا كان إنتاج ثلاثة مزارعين في أحد المواسم من زيت الزيتون بالكيلوغرامات 500 ، 600 ، 450 ، وأراد المزارعون الثلاثة تعبئة إنتاجهم في أوعية متماثلة من حيث السعة ، فما هي سعة أكبر وعاء إذا استخدم المزارعون عدداً منها بحيث يكون كل منها مملوءاً؟

15. اعط مثالاً لعددين ، يكون القاسم المشترك الأكبر لهما مساوياً أحد هذين العددين .

16. اعط مثالاً لثلاثة أعداد ، يكون القاسم المشترك الأكبر لها يساوي أحد هذه الأعداد الثلاثة .

17. جد المضاعف المشترك الأصغر (م . م . أ) للأعداد الآتية :

أ) 8 ، 56

ب) 14 ، 24

ج) 120 ، 180

18. بين صحة او خطأ البارات الآتية مع التبرير:

أ) مجموعة المضاعفات المشتركة للعددين 9 ، 81 هي مجموعة منتهية .

ب) مجموعة المضاعفات المشتركة للعددين 2، 3 هي مجموعة غير منتهية.

ج) المضاعف المشترك الأصغر للعددين (3 ، 4) = 12

د) المضاعف المشترك الأصغر للعددين (8 ، 12)= 16

19. يحتاج مشغل للحدادة قضباناً حديدية لصناعة أحد نماذج الشبابيك يتألف من قطع قياساتها بالسنتمترات 20 ، 30 ، 50 ، 100 ، فما طول أقصر قضيب حديد يشتريه المشغل، بحيث إذا قسّم إلى قطع من هذه القياسات لا يتلف شيء من القضيب؟

20. اعط مثالاً لعددين ، يكون المضاعف المشترك الأصغر لهما مساوياً أحد هذين العددين.

21. اكتب المضاعفات المشتركة للعددين 4 ، 6 التي تقل عن 150 وما هو أصغر هذه المضاعفات ؟

22. أوجد القاسم المشترك الأكبر للأعداد 8 ، 12 ، 16. ثم اوجد ناتج ضرب العددين واقسمه على القاسم المشترك الأكبر.

ما العلاقة بين ناتج القسمة الذي حصلت عليه والمضاعف المشترك الأصغر للعددين 8، 12؟ هل يمكن تعميم هذه القاعدة؟

الفصل السابع

الأعداد الصحيحة

الأعداد الصحيحة

(1.7) مقدمة:

لقد عُرّفت عملية الطرح على الأعداد الكلية على أن : جـ = أ - ب ، حيث أ ≥ ب، أ ، ب ، جـ ∋ ك.

وهذا التعريف يعنى أن عملية الطرح أ – ب يوجد لها حل وحيد في ك إذا كان أ ≥ ب، أما إذا كان أ < ب فإن هذه العبارة لا يوجد لها حل في ك.

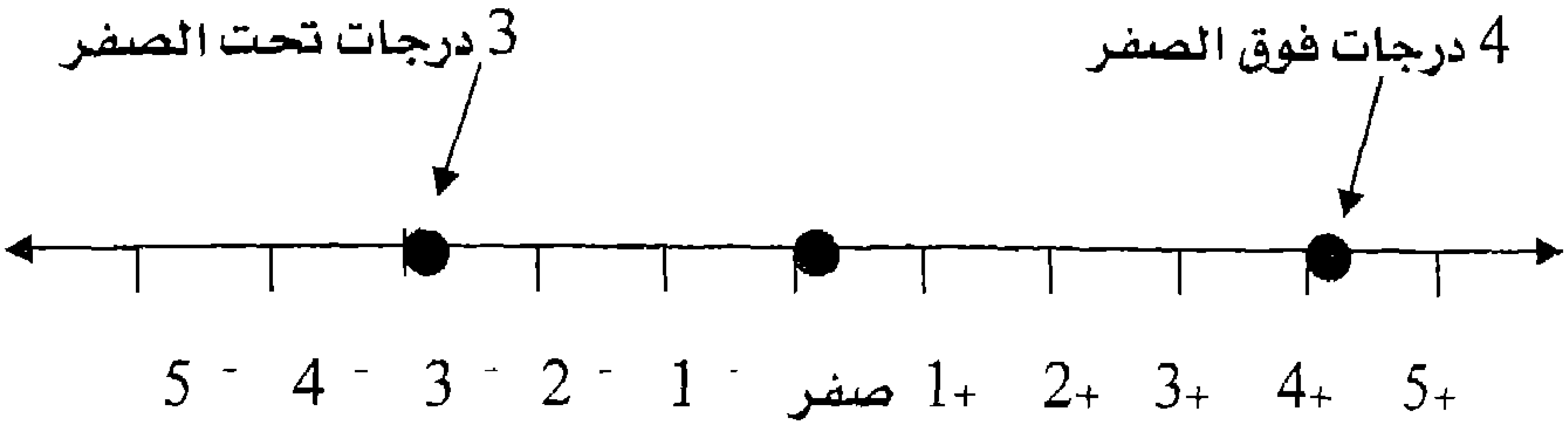
وعليه فإن، مجموعة الأعداد الكلية لا تفي بدراسة مثل هذه العبارات وغيرها، وتدعو الحاجة إلى مجموعة عددية جديدة يكون لمثل العبارة الرياضية السابقة حل فيها.

ويعرض هذا الفصل مجموعة الأعداد الصحيحة والعمليات عليها وخصائصها التي يمكن من خلالها التغلب على نواحي القصور في مجموعة الأعداد الكلية.

(2.7) الأعداد الصحيحة:

عند سماعك لنشرة الأخبار الجوية في أيام الشتاء الباردة، فإنه قد يجذب انتباهك أن درجة الحرارة في منطقة ما 4 درجات فوق الصفر مثلاً، بينما هي في منطقة أخرى 3 درجات تحت الصفر.

يعبر عن درجة الحرارة فوق الصفر بالعدد (+4)، بينما يعبر عن الدرجة تحت الصفر بالعدد (- 3)، ومن هنا فإن بعض الأعداد هي أعداد صحيحة موجبة وبعضها الآخر أعداد صحيحة سالبة، وتمثل هذه الأعداد على مستقيم الأعداد كالآتي:



الشكل (7- 1) تمثيل الأعداد الصحيحة على مستقيم الأعداد

كذلك، يستخدم خط الأعداد (بأعداده الموجبة والسالبة) للتعبير عن مقدار الربح والخسارة، أو الحركة لأعلى وأسفل، أو فوق سطح البحر وتحت سطح البحر، أو للتعبير عن مقدار ما معك وما عليك من نقود.

ومن هنا، تسمى الأعداد (+1، +2، +3 ، ....) بالأعداد الصحيحة الموجبة (الطبيعية)، ويقابل كل عدد طبيعي عدد سالب يسمى سالب العدد، فالأعداد ($\bar{1}$ ، $^-2$ ، $^-3$ ،.....) هي الأعداد الصحيحة السالبة.

وتسمى (الأعداد الطبيعية والأعداد السالبة المقابلة لها والصفر بالأعداد الصحيحة، ويرمز لها بالرمزص، حيث:

ص = { ... ،+3 ، +2 ، +1 ، 0 ، $^-1$ ، $^-2$ ، $^-3$، ... }.

ملاحظة:

الأعداد الصحيحة الموجبة هي الأعداد الطبيعية، وبالتالي يمكن التعبير عنها بدون كتابة الإشارة الموجبة، أي أن 7 تعنى +7 ، 24 تعني +24 ، وهكذا...

ويمكن التوصل إلى أن: ط $\subset$ ك $\subset$ ص، وإذا ما اعتبرنا ص$^+$ = {1،2،3،..}، ص$^-$ = {$\bar{1}$، $\bar{2}$ ، $\bar{3}$، ... }، فإن: ص = ص$^+$ $\cup$ {0} $\cup$ ص$^-$.

مثال:

عيّن على خط الأعداد ما يلي:

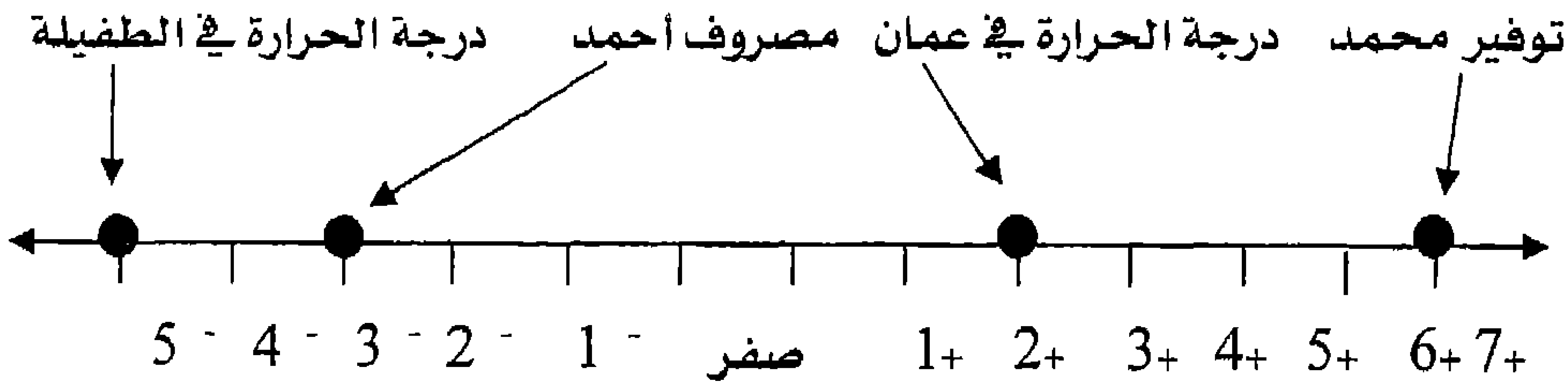
أ) وفّر محمد 6 دنانير

ب) صرف أحمد 3 دنانير

ج) درجة الحرارة في عمان 2 فوق الصفر

د) درجة الحرارة في الطفيلة 5 تحت الصفر

الحل:



(3.7) القيمة المطلقة:

تعريف القيمة المطلقة: القيمة المطلقة للعدد الصحيح هي عدد الوحدات التي يبعدها العدد الصحيح عن الصفر على خط الأعداد، ويرمز للقيمة المطلقة للعدد أ بالرمز | أ |. وتعرف كما يلي :

إذا كانت أ ∈ ص فإن :

| أ | =
- أ : أ > صفر
- صفر : أ = صفر
- − أ : أ < صفر

فمثلاً:

القيمة المطلقة للعدد +4 هي |+4| = 4 ، القيمة المطلقة للعدد ⁻4 هي | ⁻4 | = 4 ، أي أن كلاً من العددين +4 ، ⁻4 يبعد 4 وحدات عن الصفر، وكذلك ، | صفر | = صفر.

ملاحظة:

أي عددين صحيحين على خط الأعداد يبعد كل منهما المسافة نفسها عن الصفر في اتجاهين متعاكسين، نقول أن كلاً منهما معكوس للآخر فالعدد − 5 معكوس +5، والعدد +5 معكوس − 5.

مثال:

اكتب قيمة كل مما يلي:

أ) $|{}^{-}90|$ ب) $|17|$ جـ) $|{}^{-}12|$ د) |صفر|

الحل:

أ) $|{}^{-}90| = {}^{+}90$

ب) $|17| = {}^{+}17$

جـ) $|{}^{-}12| = {}^{+}12$

د) |صفر| = + صفر

(4.7) العمليات على الأعداد الصحيحة:

نفترض أن درجة الحرارة في صبيحة أحد أيام الشتاء 2 درجة مئوية، وأنها كانت في ليلة ذلك اليوم أربع درجات تحت الصفر، وسئلنا عن معدل درجة الحرارة في ذلك اليوم، فكيف نجيب عن ذلك؟

يمكن أن نعبر عن أربع درجات تحت الصفر بـ $^{-}4$، وبذلك فإن معدل درجة الحرارة سيعتمد على الدرجتين 2، $^{-}4$ وذلك بجمعهما وقسمة الناتج على 2.

إن $2 + {}^{-}4 = {}^{-}2$ وإن معدل درجة الحرارة $= {}^{-}2 \div 2 = {}^{-}1$

أي أن معدل درجة الحرارة في ذلك اليوم هو درجة واحدة تحت الصفر.

دون شك تستطيع أن تلحظ استخدام العدد الصحيح السالب واستخدام الجمع والقسمة في الأعداد الصحيحة ، وبالمثل يمكن استخدام عملية الضرب والطرح أيضاً في الأعداد الصحيحة كما سيأتي..

(1.4.7) جمع الأعداد الصحيحة:

يعرّف جمع الأعداد الصحيحة كالآتي:

أ. ناتج جمع عددين صحيحين موجبين هو عدد موجب، أي أنه إذا كان أ، ب $\in$ ص⁺ فإن أ + ب = جـ > صفر.

ب. ناتج جمع عددين صحيحين سالبين هو عدد سالب ، أي أنه إذا كان أ ، ب $\in$ ص⁻ فإن أ + ب = جـ < صفر.

ج. لجمع عددين مختلفين في الإشارة، نأخذ الفرق بين العددين بدون إشارات، ونضع للناتج إشارة العدد الذي قيمته المطلقة أكبر

مثال (1):

جد قيمة كل مما يلي:

أ) $(^-29) + (^-11)$

ب) $13 + 35$

جـ) $13 + (^-7)$

د) $(^-42) + 23$

الحل:

أ) $(^-29) + (^-11) = (^-29 + 11)$

$= (^-40)$

ب) 13 + 35 = 48

جـ) 13 + (- 7) = + 6

د) (- 42) + 23 = (- 19)

(2.4.7) عملية الطرح على الأعداد الصحيحة:

تعرّف عملية طرح الأعداد الصحيحة كالآتي:

إذا كان أ، ب ∈ ص، فإن: أ - ب = أ + (معكوس ب)

= أ + (- ب)

أي أنه لإيجاد ناتج طرح عدد صحيح من آخر، فإننا نثبت العدد الأول (أ) ونجمع إليه معكوس العدد الثاني (والذي يمثل النظير الجمعي للعدد ب في ص)، وبذلك تتحول عملية الطرح إلى عملية جمع نطبق فيها قواعد الجمع السابقة الذكر.

مثال: جد ناتج طرح ما يلي:

أ) $^{-}16$ - 7

ب) 12 - 15

جـ) $^{-}9$ - ($\bar{1}1$)

الحل:

أ) $^{-}16 - 7 = ^{-}16 + (^{-}7)$

$= ^{-}23$

ب) $12 - 15 = 12 + (^{-}5)$

$= ^{-}3$

جـ) $^{-}9 - (^{-}11) = ^{-}9 + 11$

$= 2$

(3.4.7) عملية الضرب على الأعداد الصحيحة :

تعرف عملية الضرب على الأعداد الصحيحة كالآتي :

إذا كان أ ، ب ∈ ص فإن :

أ) أ × ب > صفر عندما (1) أ > صفر ، ب > صفر

(2) أ < صفر ، ب < صفر

أي أن حاصل ضرب عددين صحيحين لهما الإشارة نفسها هو عدد صحيح موجب.

ب) أ × ب < صفر عندما (1) أ > صفر ، ب > صفر

(2) أ < صفر ، ب < صفر

أي أن حاصل ضرب عددين صحيحين مختلفين في الإشارة هو عدد صحيح سالب.

مثال : جد ناتج طرح ما يلي :

أ) $^{-}62 \times {}^{-}5$

ب) 11×4

جـ) $53 \times ({}^{-}6)$

د) $({}^{-}4) \times 19$

الحل :

أ) $^{-}62 \times {}^{-}5 = 310$

ب) $11 \times 4 = 44$

تكون إشارة الناتج موجبة إذا كانت إشارة العددين المضروبين ببعضهما متشابهة

جـ) $53 \times ({}^{-}6) = {}^{-}318$

د) $(4 -) \times 19 = (76)$

تكون إشارة الناتج سالبة إذا كانت إشارة العددين المضروبين ببعضهما مختلفة

(4.4.7) عملية القسمة على الأعداد الصحيحة:

تعرف عملية قسمة الأعداد الصحيحة كالآتي:

لقسمة عددين صحيحين فإن:

1. ناتج قسمة عدين صحيحين لهما الإشارة نفسها يكون موجباً
2. ناتج قسمة عدين صحيحين مختلفين في الإشارة يكون سالباً.

مثال: جد ناتج طرح ما يلي:

أ) $^{-}42 \div 7$

ب) $^{-}75 \div {}^{-}3$

الحل:

أ) $^{-}42 \div 7 = -6$ ($^{-}42$، 7 مختلفين في الإشارة فالناتج إشارته سالبة)

ب) $^{-}75 \div {}^{-}3 = {}^{+}25$ ($^{-}75$، $^{-}3$ لهما الإشارة نفسها فالناتج إشارته موجبة)

سؤال:

أ) ما ناتج قسمة صفر على عدد صحيح؟

ب) ما قيمة أ ÷ صفر : أ عدد صحيح؟

ج) ما قيمة صفر ÷ صفر؟

الحل:

أ) ناتج قسمة صفر على أي عدد صحيح غير الصفر = صفر دائماً .

ب) أ ÷ صفر = + ∞ ، أ عدد صحيح موجب

أ ÷ صفر = - ∞ ، أ عدد صحيح سالب

ج) صفر ÷ صفر = عدد لا نهائي من الأعداد الصحيحة، فلو فرضنا أن صفر ÷ صفر = جـ ، وأن جـ يجب أن يكون وحيداً ⟸ صفر = صفر × جـ وهذا صحيح لأي جـ ، أي أن جـ ليس وحيداً .

إذن، صفر÷ صفر هو كمية غير معرفة أو غير محددة.

(5.7) خصائص العمليات على الأعداد الصحيحة:

يمكن دراسة خصائص العمليات الثنائية (ص ، +)،(ص، -)، (ص ، ×)، (ص ، ÷) على النحو الآتي:

(5.1.7) خصائص عملية الجمع على الأعداد الصحيحة:

(1) خاصية الانغلاق:

إذا كان أ ، ب ∈ ص فإن أ + ب ∈ ص

أي أن ناتج جمع أي عددين صحيحين هو عدد صحيح، ولذا فإن مجموعة الأعداد الصحيحة مغلقة تحت عملية الجمع.

مثال:

تحقق من خاصية انغلاق الجمع على الأعداد الصحيحة بأمثلة عددية .

الحل:

$^-6$ ، $^-9$ ∈ ص

$^-6$ + $^-9$ = $^-15$ ∈ ص

كذلك ، ($^-10$) ، 3 ∈ ص

($^-10$) + 3 = -7 ∈ ص

(2) الخاصية الإبدالية:

إذا كان أ ، ب ∈ ص فإن أ + ب = ب + أ

مثال:

تحقق من الخاصية الإبدالية في جمع الأعداد الصحيحة بأمثلة عددية.

الحل:

13 ، $^{-}11$ ∈ ص

$13 + (^{-}11) = {}^{+}2$

و $(^{-}11) + 13 = {}^{+}2$

إذن $13 + (^{-}11) = (^{-}11) + 13$

كذلك ، $^{-}3$ ، $^{-}8$ ∈ ص

$(^{-}3) + (^{-}8) = {}^{-}11$

$(^{-}8) + (^{-}3) = {}^{-}11$

إذن $(^{-}3) + (^{-}8) = (^{-}8) + (^{-}3)$

(3) الخاصية التجميعية:

إذا كان أ ، ب ، جـ ∋ ص فإن

(أ + ب) + جـ = أ + (ب + جـ)

مثال:

تحقق من صحة الخاصية التجميعية فيما يلي:

$$(3 + (^{-}4)) + 9 \overset{?}{=} 3 + ((^{-}4) + 9)$$

الحل:

الطرف الأيمن = $(3 + (^{-}4)) + 9$

= $(^{-}1) + 9$

= $+8$

الطرف الأيسر = $3 + ((^{-}4) + 9)$

= $3 + (+3)$

= $+8$

إذن الطرفان متساويان

(4) خاصية العنصر المحايد في عملية الجمع على الأعداد الصحيحة:

العنصر المحايد في عملية الجمع على الأعداد الصحيحة هو الصفر، حيث أنه:

إذا كان أ ∈ ص فإن أ + صفر = صفر + أ = أ

فمثلاً:

(- 7) + صفر = صفر + (- 7) = (- 7)

كذلك ، (+ 9) + صفر = صفر + 9 = 9

(5) خاصية النظير الجمعي للأعداد الصحيحة:

إذا كان أ ∈ ص فإنه يوجد نظير جمعي ⁻ أ بحيث :

أ + (⁻ أ) = صفر ، ويسمى الصفر المحايد الجمعي

أي أنه لكل عدد صحيح فإنه يوجد نظير جمعي له هو معكوسه

مثال :

ما هو النظير الجمعي للأعداد الآتية:

9، ⁻ 7 ، ⁻ 101 ، صفر ؟

الحل:

النظير الجمعي للعدد 9 هو معكوسه (- 9)

النظير الجمعي للعدد (- 7) هو معكوسه (+ 7)

النظير الجمعي للعدد (- 101) هو معكوسه (+ 101)

النظير الجمعي للعدد صفر هو الصفر نفسه لأن صفر + صفر = صفر

(2.5.7) خصائص عملية الطرح على الأعداد الصحيحة:

(1) خاصية الانغلاق:

إذا كان أ ، ب ∈ ص فإن أ − ب ∈ ص

فمجموعة الأعداد الصحيحة مغلقة تحت عملية الطرح.

فمثلاً:

$5 ، -3$ ∈ ص

$5 - (-3) = 5 + 3 = 8$ ∈ ص

كذلك ، $-2 ، +9$ ∈ ص

$-2 - 9 = -2 + (-9) = -11$ ∈ ص

أما بالنسبة لبقية الخصائص، فإن عملية الطرح على الأعداد الصحيحة ليست تبديلية وليست تجميعية ولا يوجد لها عنصر محايد.

مثال:

بيّن بأمثلة عددية أن عملية الطرح على مجموعة الأعداد الصحيحة ليست تبديلية.

الحل:

$15 - 6 = 9$

بينما $6 - 15 = 6 + (-15) = -9$

$15 - 6 \neq 6 - 15$

إذن عملية الطرح ليست تبديلية

تدريب:

أ) بين بمثال عددي أن عملية الطرح على مجموعة الأعداد الصحيحة ليست تجميعية.

ب) لماذا لا يعتبر الصفر عنصراً محايداً في عملية طرح الأعداد الصحيحة؟

(3.5.7) خصائص عملية الضرب على الأعداد الصحيحة:

(1) خاصية الانغلاق:

إذا كان أ ، ب ∈ ص فإن أ × ب ∈ ص

أي أن ناتج ضرب أي عددين صحيحين هو عدد صحيح ،ونقول : مجموعة الأعداد الصحيحة مغلقة تحت عملية الضرب.

مثال:

تحقق من انغلاقية الضرب على الأعداد الصحيحة بأمثلة عددية.

الحل:

7، -15 ∈ ص

7 × -15 = -105 ∈ ص

كذلك ، 8، 9 ∈ ص

8 × 9 = 72 ∈ ص

(2) الخاصية الإبدالية:

إذا كان أ ، ب ∈ ص فإن أ × ب = ب × أ

مثال:

تحقق من صحة الخاصية الإبدالية فيما يلي:

5 - × 14 -

الحل:

70+ = 5 - × 14 -

كذلك ، 5 - × 14 - = 70+

إذن: 14 - × 5 - = 5 - × 14 -

(3) الخاصية التجميعية:

إذا كان أ ، ب ، جـ ∈ ص فإن

(أ × ب) × جـ = أ × (ب × جـ)

مثال:

تحقق من صحة الخاصية التجميعية فيما يلي :

(5 - × 6 -) × 3 ؟= 5 - × (6 - × 3)

الحل:

الطرف الأيمن $= (3 \times (-6)) \times -5$

$= -18 \times -5$

$= +90$

الطرف الأيسر $= 3 \times (-6 \times -5)$

$= 3 \times (+30)$

$= +90$

إذن: الطرفان متساويان

(4) خاصية العنصر المحايد في عملية الضرب على الأعداد الصحيحة:

العنصر المحايد في عملية ضرب الأعداد الصحيحة هو العدد (1)، لأنه إذا كان أ $\in$ ص فإن أ × 1 = 1 × أ = أ

فمثلاً:

$3 \times 1 = 1 \times 3 = 3$

$-16 \times 1 = 1 \times -16 = -16$

(5) خاصية النظير الضربي للأعداد الصحيحة:

<u>لا يوجد</u> نظير ضربي لأي عدد صحيح خلا العددين 1، $^-1$ إذ أن كل منهما نظير ضربي.

حيث أن: $1 \times 1 = 1$

كذلك $^-1 \times {}^-1 = 1$، ويسمى العدد (1) المحايد الضربي، (1)، ($^-1$) كل منهما هو نظير ضربي لنفسه.

(6) خاصية توزيع الضرب على الجمع والطرح في مجموعة الأعداد الصحيحة:

إذا كان أ، ب، جـ $\ni$ ص فإن

أ × (ب $\pm$ جـ) = (أ × ب) $\pm$ (أ × جـ)

مثال (1):

تحقق من صحة الخاصية التوزيعية فيما يلي:

$$^-6 \times (^-5 - 20) \overset{?}{=} (^-6 \times {}^-5) - (^-6 \times 20)$$

الحل:

الطرف الأيمن = $^-6 \times (^-5 - 20)$

$= {}^-6 \times {}^-25$

$= +150$

الطرف الأيسر = $(^-6 \times {}^-5) - (^-6 \times 20)$

$= (+30) - (^-120)$

$= 30 + 120$

$= 150$

إذن: الطرفان متساويان

مثال (2):

جد ناتج ما يلي باستخدام الخاصية التوزيعية للضرب على الجمع ($120 \times {}^{-}7$)، ثم تحقق من صحة حلك.

الحل:

$$120 \times {}^{-}7 = (100 + 20) \times {}^{-}7$$

$$= (100 \times {}^{-}7) + (20 \times {}^{-}7)$$

$$= {}^{-}700 + {}^{-}140$$

$$= {}^{-}840$$

التحقق من صحة الحل:

$120 \times {}^{-}7 = {}^{-}840$ (إذن الحل صحيح).

مثال (3):

باستخدام خاصية توزيع الضرب على الجمع ، جد ناتج مايلي:

$(75 \times 203) + (75 \times 97)$.

الحل:

لاحظ أن المقدار السابق هو $75 \times (203 + 97)$

$$= 75 \times 300 = 22500$$

(4.5.7) خصائص عملية القسمة على الأعداد الصحيحة:

إن عملية القسمة على الأعداد الصحيحة لا تحقق أياً من الخصائص السابقة التي حققتها عملية الضرب فهي:

(1) ليست مغلقة:

فمثلاً : إذا كان 20 ، 4 $\in$ ص فإن $20 \div 4$ $\notin$ ص

(2) ليست تبديلية:

فمثلاً : $25 \div -5 \neq -5 \div 25$

إذ أن $25 \div -5 = -5$

بينما $-5 \div 25$ $\notin$ ص

(3) ليست تجميعية:

فمثلاً: $(12 \div 6) \div 2 \neq 12 \div (6 \div 2)$

لأن الطرف الأيمن = $(12 \div 6) \div 2$

$= 2 \div 2$

$= 1$

بيما الطرف الأيسر = $12 \div (6 \div 2)$

$= 12 \div 3$

$= 4$

وإن $1 \neq 4$

إذن: الطرفان غير متساويين

(4) لا يوجد عنصر محايد في عملية قسمة الأعداد الصحيحة:

لأنه لو افترضنا أن العدد (1) هو المحايد في عملية القسمة

فنجد أن $6 \div 1 = 6$

بينما $1 \div 6 \neq 6$

وهذا يجعل فرضنا غير صحيح من الأصل.

وبالتالي، فإنه لا يوجد نظير في عملية قسمة الأعداد الصحيحة لعدم وجود محايد بالأصل.

❖ ويوضح الجدول الآتي ملخصاً للعمليات الحسابية على ص وخصائص هذه العمليات:

الخاصية	(ص، +)	(ص، -)	(ص، ×)	(ص، ÷)
الانغلاق	✓	✓	✓	×
الإبدالية	✓	×	✓	×
التجميعية	✓	×	✓	×
التوزيعية	×	×	تتوزع عملية الضرب على كل من الجمع والطرح	×
المحايد	الصفر	×	1	×
النظير	✓	×	×	×

(6.7) المعادلات والمتباينات:

يتناول هذا البند موضوع المعادلات والمتباينات بشكل مبسط جداً يتناسب واحتياجات المعلمين في المرحلة الأساسية الأولى، إذ أن موضوع المعادلات والمتباينات هو موضوع واسع جداً تصعب الإحاطة به من جميع جوانبه في بند من فصل.

(1.6.7) المعادلات:

إذا أمعنت النظر في الجمل الآتية:

1) 5 هو عدد صحيح فردي.

2) (- 8) هو عدد صحيح موجب.

3) س هو عدد طبيعي أولي.

تلاحظ أن الجملة (1) هي جملة صحيحة، والجملة (2) هي جملة خاطئة، في حين أنه لا يمكن الحكم على صحة أو خطأ الجملة (3)، إذ أن قيمة المتغير س غير معروفة، وإذا ما عوضنا بعدد مثل 2، 3، 5، 7، ... بدل المتغير س فعندها تصبح الجملة صحيحة، وإذا ما عوضنا بعدد مثل 1، 4، 8، ... بدل المتغير س تصبح الجملة خاطئة.

تسمى الجملة (3) "جملة مفتوحة" وتسمى كل من الأعداد التي تجعل الجملة المفتوحة جملة صحيحة "حلاً " لهذه الجملة.

وإذا ما تأملت الجمل الآتية:

1) 3س = 9

2) 4 + ص = 6

فإن كلاً من الجملتين (1) (2) هي جملة مفتوحة تحتوي على متغير وإشارة مساواة (=)، وتسمى كلاً من هاتين الجملتين " معادلة " ، والعدد أو الأعداد التي تجعل المعادلة صحيحة هي حلول لهذه المعادلة ، وتسمى المجموعة التي تضم حل أو حلول المعادلة مجموعة التعويض (والتي ستعتبر في هذا الفصل مجموعة الأعداد الصحيحة).

ويمكن حل مثل هذه المعادلات البسيطة من خلال معرفة خصائص المعادلات (بمعنى إيجاد قيمة المتغير الذي يجعل المعادلة صحيحة).

خصائص المعادلات:

ليكن أ ، ب ، جـ ، د ، هـ ، و ∋ ص :

1) إذا كان أ = ب فإن أ + جـ = ب + جـ (إضافة عدد ثابت لطرفي المعادلة)
2) إذا كان أ = ب فإن أ × جـ = ب × جـ (ضرب طرفي المعادلة بعدد ثابت)

3) إذا كان أ + ب = جـ + د ، وكان ب = هـ ، د = و فإن أ + هـ = جـ + و (خاصية التعويض).

4) إذا كان أ +جـ = ب + جـ فإن أ = ب

5) إذا كان أ جـ = ب جـ ، وكان جـ ≠ صفر فإن أ = ب

(2.6.7) المتباينات:

إذا تأملت الجمل الآتية:

1) $2 < 6$ (6 أكبر من 2)

2) $-4 \geq -1$ ($-4 > -1$ أو $-4 = -1$)

حيث أن: $\geq$ تقرأ أصغر من أو يساوي.

لعلك تلاحظ أن كلاً من الجملتين (1) (2) تتضمن علاقة ترتيب ،إذ تسمى $>$ ، $<$ ، $\geq$ ، $\leq$ علاقة ترتيب على الأعداد الصحيحة (باعتبارها مجموعة التعويض).

وبشكل عام، إذا كان أ ، ب عددين صحيحين فإما أن يكون

أ = ب (معادلة)

أو أ $>$ ب أو أ $<$ ب	⟸ (تسمى كلاً منهما متباينة)

وقد يتم دمج متباينتين معاً على النحو الآتي:

س $<$ ص $<$ ع ، وهي تعني ان س $<$ ص ، وفي نفس الوقت ص $<$ ع .

وتعرف المتباينة على النحو الآتي:

إذا كان أ ، ب $\ni$ ص فإن أ $>$ ب إذاً وإذاً فقط وجد عدد صحيح جـ ،

بحيث أن: أ = ب + جـ

خصائص المتباينات:

ليكن أ ، ب ، جـ ∋ ص :

1) إذا كان أ ≥ ب فإن أ + جـ ≥ ب + جـ

2) إذا كان أ ≥ ب وكان جـ ≤ صفر فإن أجـ ≥ ب جـ

3) إذا كان أ ≥ ب وكان جـ ≥ صفر فإن أجـ ≤ ب جـ

4) إذا كان أ ≥ ب ، ب ≥ جـ فإن أ ≥ جـ

5) إذا كان أ ، ب لهما نفس الإشارة فإن أب > صفر

6) إذا كان أ ، ب لهما إشارتان مختلفتان فإن أب < صفر

مثال:

استخدم خصائص المتباينات في حل كل متباينة مما يأتي ثم مثل منطقة الحل على مستقيم الأعداد. (علماً بأن مجموعة التعويض هي ص).

1) س + 4 > - 2

2) - ص - 3 ≤ 9

3) 4 س + 2 > - 10

الحل:

1) س + 4 > - 2

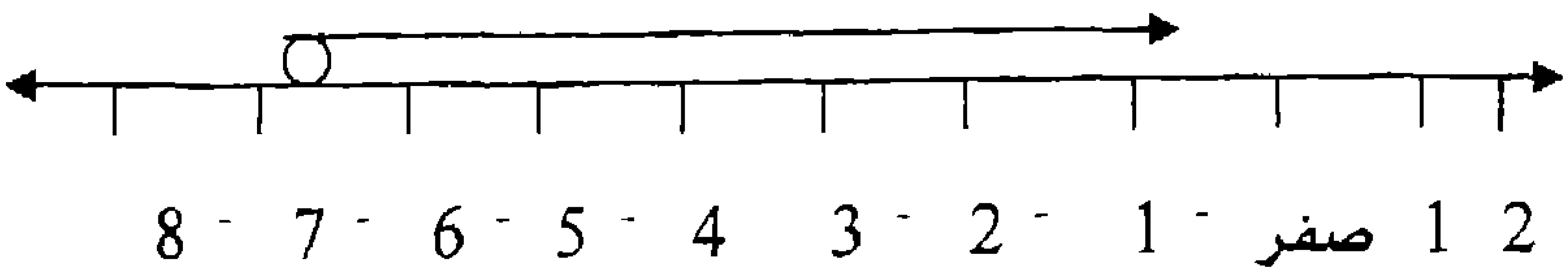
(س+ 4) + (- 4) > - 2 + (- 4) بإضافة (- 4) للطرفين

س + (4+ - 4) > - 6 الخاصيّة التجميعيّة في ص

س + صفر > - 6 خاصية النظير الجمعي في ص

∴ س > - 6

وعليــه فــإن قــيم س هــي {- 5، - 4، - 3، - 2، - 1، 0، 1، 2 .... }



2) ⁻ ص - 3 ≤ 9

(⁻ ص − 3) + 3 ≤ 9 + 3

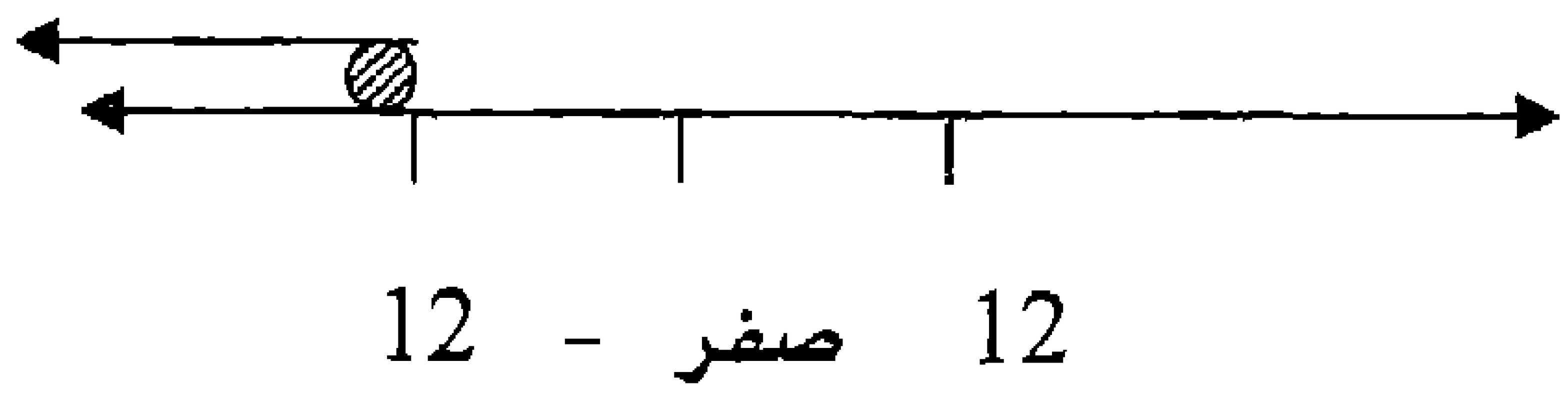
⁻ ص + (- 3 + 3) ≤ 12

⁻ ص + صفر ≤ 12

- ص × (- 1) ≥ 12 × (- 1)

∴ ص ≥ ⁻ 12

وعليه فإن قيم ص هي {- 12 ، - 13 ، - 14 ، - 15 ،....... }



ملاحظة:

تظلل الدائرة إذا كانت علاقة الترتيب ≥ أو ≤ ، وتبقى الدائرة غير مظللة إذا كانت العلاقة: < أو > فقط بدون مساواة.

3) $4س + 2 > {}^{-}10$

$(4س+2) + ({}^{-}2) > {}^{-}10 + ({}^{-}2)$

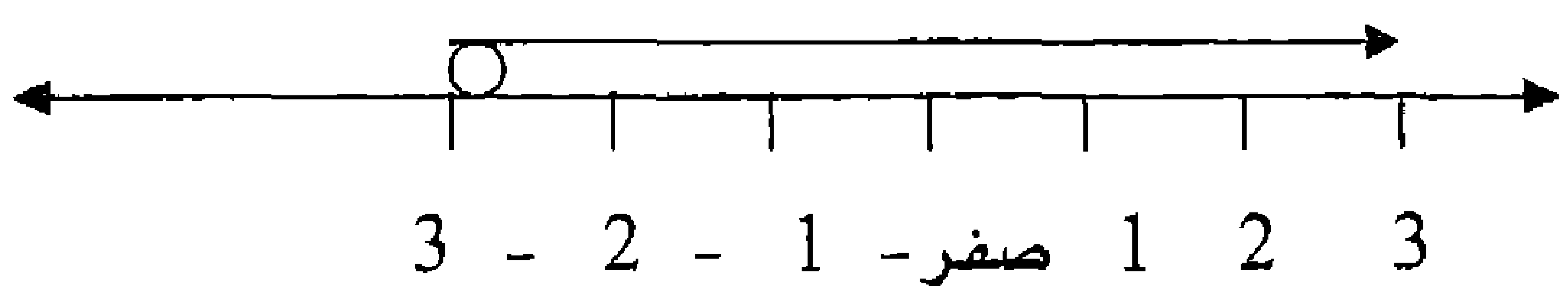
$4س + (2 + {}^{-}2) > {}^{-}12$

$4س + صفر > {}^{-}12$

$4س \div 4 > {}^{-}12 \div 4$

$\therefore \quad س > {}^{-}3$

وعليه فإن قيم س هي { ⁻2، ⁻1، 0، 1، 2 .... }



(7.7) تمارين ونشاطات:

1. ضع إشارة (×) على رمز الإجابة الصحيحة لكل فقرة مما يأتي :

1. النظير الجمعي للعدد (- 3) هو :

أ) 3

ب) ⁻ 3

جـ) $\frac{1}{3}$

د) $\frac{1}{3}$ ⁻

2. العدد الصحيح الذي له نظير ضربي هو :

أ) 1

ب) ⁻ 1

جـ) 1 ، - 1

د) صفر

3. العنصر المحايد في عملية جمع الأعداد الصحيحة هو:

أ) صفر

ب) 1

جـ) - 1

د) صفر، 1

4. $(^-8 \div 4) \times (^-3 \times ^-2) \div 12 =$

أ) 1

ب) $^-1$

جـ) 2

د) $^-2$

5. إذا كانت س = 4 في المعادلة 2 ص - س = 2 ، فإن ص =

أ) 4

ب) 3

جـ) $^-1$

د) صفر

6. $(3 + {}^-11) =$

أ) 14

ب) 8

جـ) $^-14$

د) $^-8$

7. (2 × (⁻2 - 10)) =

أ) ⁻ 12

ب) 20

جـ) ⁻ 24

د) 24

8. (ص، -) تحقق خاصية:

أ) الانغلاق

ب) المحايد

جـ) النظير

د) الإبدال

9. أصغر عدد سالب من بين الأعداد ⁻ 7، ⁻ 2، ⁻ 5، ⁻ 10 هو:

أ) ⁻7

ب) ⁻ 2

جـ) ⁻ 5

د) ⁻ 10

10. $(^{-}8 + 13) - {}^{-}5 =$

أ) 26

ب) صفر

جـ) 10

د) 5

11. $18 - 5 - 1 =$

أ) 12

ب) 14

جـ) 13

د) ليس لها جواب محدد

12. $(^{-}8 \div 4) \times (^{-}3 \times {}^{-}2) \div {}^{-}12 =$

أ) 1

ب) $^{-}1$

جـ) 2

د) $^{-}2$

13. إذا كان 3 س - 5 = ⁻ 26 فإن س =

أ) 7

ب) ⁻ 21

جـ) ⁻ 7

د) 21

14. إذا كانت س = 4 في المعادلة 2 ص - س = 2 فإن ص =

أ) 4

ب) 3

جـ) ⁻ 1

د) صفر

15. $(2 \times (^{-}2 - 10)) =$

أ) ⁻ 12

ب) ⁻ 20

جـ) ⁻ 24

د) 24

16.) (ص، +) تحقق خاصية:

أ) المحايد

ب) التبديل

ج) النظير

د) جميع ما ذكر

17. أصغر عدد صحيح سالب من بين الأعداد $^{-}7$، $^{-}2$، $^{-}5$، $^{-}10$ هو:

أ) $^{-}7$

ب) $^{-}2$

ج) $^{-}5$

د) $^{-}10$

18. حل المتباينة 3 - س > - 4 هو :

أ) س > $^{-}7$

ب) س > 7

ج) س < $^{-}7$

د) س < $^{-}7$

19. يعبر عن ثلاثة أمثال ص مطروحاً منها 5 أمثال س بـ :

أ) 5 س – ص

ب) 5 س - 3 ص

جـ) 5 س - 3 ص

د) 5 س - 3 ص

20. مجموعة حل المتباينة 2 س + 3 ≥ ⁻7 هي :

أ) س ≥ - 5

ب) س ≥ 5

جـ) س ≥ - 2

د) س ≥ 2

2. أوجد قيمة كل مما يلي إن أمكن في ص:

أ) 5 + 3 × 4 - 2 ÷ 2

ب) |3 × ⁻2 ÷ 3 - 1|

جـ) (39 ÷ ⁻3) × ⁻4

د) 2 - 5 × 1

هـ) |(2 - 3) × 4 + 5 (2 - 1) + 5|

و) $8 + (2 \;{}^{-} \times 4) \div 16 + 2$

ز) $3 \;{}^{-} \times (4 + 4 \;{}^{-})$

ح) $3 \;{}^{-} \times 4 + 4 \;{}^{-}$

ط) $|(3 \; - 5\,{}^{-})(3\,{}^{-} \; - 5\,{}^{-})(\,{}^{-}5 - 3)|$

ي) $3 \div 15 \; - |24\,{}^{-}|$

ك) $|429\,{}^{-}| + |197\,{}^{-}|$

3. اذكر إشارة ناتج كلٍّ من:

ا) $11 + 29\,{}^{-}$

ب) $(25) + 14\,{}^{-}$

جـ) $(45\,{}^{-}) \; - 100\,7\,{}^{-}$

د) $5 \;{}^{-} \times 98$

هـ) $1125\,{}^{-} \times 100\,{}^{-}$

و) $5\,{}^{-} \div 25\,{}^{-}$

4. أوجد القيمة المطلقة للأعداد التالية:

ا) $579\,{}^{-}$

ب) صفر

جـ) 2743

د) $3198\,{}^{-}$

5. عددان صحيحان مجموعهما 67 ، أحدهما ⁻ 35 ، فما العدد الآخر؟
6. أوجد ناتج كل مما يلي:

أ) ك ∩ ص

ب) ص - ك

جـ) ص⁻ ∩ ك*

7. ما الخواص المتحققة في (ص ، + ، ×) ؟
8. في صيف أحد الأيام كانت أعلى درجة حرارة مسجلة في مدينة س (38)° م، وأدنى درجة حرارة مسجلة في شتاء العام نفسه (- 5)°م ، أوجد الفرق بين أعلى درجة وأدنى درجة حرارة في المدينة س في ذلك العام ؟
9. اتفق طلاب الصف الثامن في مدرسة ما على صيانة وتجميل صفهم ، فاشتروا 6 علب دهان بسعر (7) دنانير ، و (16) متر من قماش الستائر بسعر 2 دينار للمتر الواحد ، فإذا كان عدد طلاب الصف (37) طالباً فكم ديناراً يدفع كل منهم ؟
10. حل المعادلات و المتباينات الآتية: (مجموعة التعويض هي ص)

أ) ⁻ 4 (س + 3) = 12

ب) 2س = ⁻ 14

جـ) 5ص > - 10

د) ⁻ ص - 2 ≥ 2

11. إذا كان عدد الخراف في مزرعة حيوانات يزيد عن عدد الجمال بمائة رأس، فما عدد الخراف إذا كان مجموع ما في المزرعة من الخراف والجمال يساوي 300 رأس.

الفصل الثامن

الأعداد النسبية

الأعداد النسبية

(1.8)مقدمة

بالنظر إلى الجملة المفتوحة 6 ÷ 2 = □؛ فإن حلها يساوي العدد الصحيح الموجب (2) ، وبإمعان النظر في الجملة المفتوحة 2 ÷ 6 = □ ؛ فإننا نجد أنه لا يوجد لها حل في مجموعة الأعداد الكلية أو الصحيحة.

وبالمثل، فإن المعادلة 8 س= − 3 تتطلب منا البحث عن العدد س الذي إذا ضرب في 8 يكون الناتج − 3 ، وهذا العدد لا نجده في أي من المجموعتين الكلية أو الصحيحة.

وبوجه عام، فإن معادلة بسيطة مثل:

أس = ب حيث أ، ب ∋ص، أ ≠ صفر قد لا يوجد لها حل دائماً في ك أو ص، ولهذا فإن هاتين المجموعتين لا تفيا بدراسة مثل هذه المعادلات، وعليه تظهر الحاجة إلى مجموعة أعداد جديدة يمكن ان نجد فيها دائماً حلاً لمثل المعادلة أس = ب السابقة الذكر.

وهكذا، يتناول هذا الفصل مجموعة عددية جديدة تسمى الأعداد النسبية التي يمكن من خلالها التغلب على قصور مجموعة الأعداد الكلية ومجموعة الأعداد الصحيحة، بالإضافة إلى تناول العمليات على هذه الأعداد وخصائصها.

(2.8) الأعداد النسبية:

(1.2.8) تعريف العدد النسبي:

يُعرّف العدد النسبي على أنه العدد الذي يمكن كتابته على الصورة :

$\frac{أ}{ب}$ حيث أ ، ب أعداد صحيحة ، ويشرط أن ب $\neq$ صفر ، ويرمز لمجموعةالأعداد النسبية بالرمز ن، حيث: ن = { $\frac{أ}{ب}$: أ ، ب $\in$ ص ، ب $\neq$ ٠ }

ويمكن التعبير عنها كذلك كالأتي:

$$ن = \{م : م = \frac{أ}{ب} ، أ \in ص، ب \in ص^{*}\}$$

ويطلق على العدد النسبي م = $\frac{أ}{ب}$ كسراً عادياً، يسمى أ بسطه و ب مقامه، ويسمى الخط بين البسط والمقام بخط الكسر.

وبذلك، فإن العدد النسبي هو كل عدد يمكن أن يكتب على صورة بسط ومقام ، فالعدد الكلي (7) عدداً نسبياً لأنه يمكن كتابته على الصورة $\frac{7}{3}$، والعدد الصحيح ($^{-}13$) يعتبر عدداً نسبياً .إذاً يكتب على الصورة $\frac{^{-}13}{1}$ ، وكذلك فإن الكسور $\frac{3}{5}$ ، - $\frac{16}{27}$، $\frac{2}{3}$، - $\frac{1}{4}$ هي كلها أعداداً نسبية.

وبشكل عام ، فإن كل عدد صحيح هو عدد نسبي ، ولكن ليس كل عدد نسبي هو عدد صحيح.

وعليه، فإن مجموعة الاعداد الصحيحة هي مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد النسبية. أي أن ص $\subset$ ن.

ويلاحظ من تعريف العدد النسبي أن (ب) مقام الكسر العادي هو عدد صحيح لا يساوي الصفر، إذ لو كان مقام الكسر مساوياً للصفر لأصبحت قيمة الكسر كمية غير معرفة (غير محددة)، ولذلك فإن مقام الكسر لا يجوز أن يساوي صفراً بأي حال من الأحوال.

وحيث أن العدد أ بسط الكسر هو عدد صحيح (أ ∈ ص)؛ فإنه يمكن أن يساوي صفراً ، وعندما (أ = صفر) يكون الكسر $\frac{أ}{ب}$ = صفراً .

وبذلك يمكن تعريف ن* كالآتي:

ن* = {م: م = $\frac{أ}{ب}$ ، أ ∈ ص* ، ب ∈ ص*}

أي أن ن* تمثل مجموعة الأعداد النسبية باستثناء الصفر .

(2.2.8) تكافؤ الأعداد النسبية:

إذا كان $\frac{أ}{ب}$ ، $\frac{جـ}{د}$ عددين نسبيين فإن:

$\frac{أ}{ب}$ يكافئ $\frac{جـ}{د}$ ويكتب $\frac{أ}{ب}$ = $\frac{جـ}{د}$ إذا و إذا فقط كان أ×د = ب×جـ

مثال:

بيّن أن الأعداد النسبية الآتية متكافئة:

أ) $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$

ب) $\frac{4}{-8} = \frac{-4}{8}$

ج) $\frac{-2}{-5} = \frac{2}{5}$

الحل:

أ) $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$ لأن $3 \times 12 = 4 \times 9 = 36$

ب) $\frac{4}{-8} = \frac{-4}{8}$ لأن $4 \times 8 = -4 \times -8 = 32$

ج) $\frac{-2}{-5} = \frac{2}{5}$ لأن $-2 \times 5 = -5 \times 2 = -10$

قاعدة:

للحصول على عدد نسبي مكافئ للعدد نسبي $\frac{أ}{ب}$ ، ولأي عدد جـ $\neq$ صفر،

فإن : $\frac{أ}{ب} = \frac{أ \times جـ}{ب \times جـ}$

فمثلاً : $\frac{3}{4} = \frac{3 \times 2}{4 \times 2} = \frac{6}{8}$

$\frac{-8}{9} = \frac{-8 \times 3}{9 \times 3} = \frac{-24}{27}$

$\frac{-3}{5} = \frac{-3 \times -1}{5 \times -1} = \frac{3}{-5}$

وبإمعان النظر في المثال الأخير نجد أن:

$\frac{-3}{5} = \frac{3}{-5}$

وهذا يعني أن الإشارة السالبة في البسط أو المقام تشير إلى عدد نسبي سالب ، اي أن

$$\frac{-3}{5} = \frac{3}{-5} = -\frac{3}{5}$$

أي أن $\frac{-أ}{ب} = \frac{أ}{-ب} = -\frac{أ}{ب}$

مثال:

إذا كان $\frac{3}{5} = \frac{6}{س}$ فما قيمة س ؟

الحل:

بما أن $\frac{3}{5} = \frac{6}{س}$ ولأن $\frac{3}{5}$ ، $\frac{6}{س}$ عددان نسبيان متكافئان

إذن $3 \times س = 5 \times 6$

$$3س = 30$$

$$س = \frac{30}{3}$$

$$س = 10$$

(3.8) الكسور العادية:

بالعودة إلى تعريف العدد النسبي ، فإن الأصل في الأعداد النسبية هو الكسور العادية المكونة من بسط ومقام ، والتي تقسم إلى نوعين رئيسين:

1) الكسور العادية الفعلية: وهي الكسور المحصورة بين الصفر والواحد، مثل:

$\frac{1}{3}$ ، $\frac{2}{5}$

أو الكسور المحصورة بين الصفر وسالب الواحد، مثل: $-\frac{3}{7}$ ، $-\frac{4}{9}$.

2) الكسور العادية غير الفعلية: وهي الكسور التي بسطها أكبر من أو يساوي مقامها ، مثل : $\frac{5}{5}$ ، $\frac{15}{3}$ ، $\frac{27}{4}$

فالكسر $\frac{5}{5} = 1$ عدد صحيح، ولذا فهو كسر عادي غيرفعلي، وبالمثل فالكسر $\frac{15}{3} = 5$ أيضاً عدد صحيح يمثل كسراً عادياً غير فعلي.

وأما الكسر $\frac{27}{4}$ فلا يمكن تحويله إلى عدد صحيح وإنما بالإمكان تحويله إلى ما يسمى (العدد الكسري) من خلال قسمة بسطه على مقامه كما سيأتي لاحقاً.

(1.3.8) تحويل الكسر العادي غير الفعلي إلى عدد كسري وبالعكس:

تعلم مما سبق أنه بالإمكان تحويل الكسر العادي غير الفعلي إلى عدد صحيح أو إلى عدد كسري، فالكسر العادي غير الفعلي $\frac{6}{2}$ هو العدد الصحيح 3 لأن $\frac{6}{2} = \frac{3}{1}$،

وبالمثل فإن هنالك كثيراً من الكسور العادية غير الفعلية التي يمكن تحويلها إلى أعداد صحيحة .

وكذلك فإنه بالإمكان تحويل الكسرالعادي غير الفعلي $\frac{27}{4}$ إلى عدد كسري من خلال قسمة بسطه على مقامه كالآتي:

الناتج ← 6

المقسوم ← 27 | 4 → المقسوم عليه

24

الباقي → 3

إذن $\frac{27}{4} = 6\frac{3}{4}$

يسمى العدد الناتج من عملية القسمة ($6\frac{3}{4}$)عدداً كسرياً لاحتوائه عدد صحيح (6) وكسر $\frac{3}{4}$ فالعدد الصحيح هو ناتج عملية القسمة، والكسر الفعلي يتألف من بسط هو باقي عملية القسمة، ومقام هو المقسوم عليه في عملية القسمة.

كذلك، يمكن تحويل العدد الكسري إلى كسر غير فعلي كالآتي:

$$6\frac{3}{4} = \frac{(4\times 6)+3}{4}$$

$$= \frac{24+3}{4}$$

$$= \frac{27}{4}$$

قاعدة:

إن القاعدة في تحويل العدد الكسري هي كالآتي:

إذا كان أ $\frac{\text{جـ}}{\text{ب}}$ هو عدد كسري حيث أ، ب، جـ $\in$ ص ، ب $\neq$ صفر

فإن : كان أ $\frac{\text{جـ}}{\text{ب}}$ = $\frac{(\text{أ}\times\text{ب}) + \text{جـ}}{\text{ب}}$

مثال (1):

حوّل الكسور العادية الآتية إلى أعداد كسرية:

1) $\frac{15}{4}$ 2) $\frac{51^-}{8}$ 3) $\frac{29^-}{6}$

الحل:

1) $\frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$

$$\begin{array}{r|l} 4 & 15 \\ & \underline{12}\ - \\ & 3 \end{array} \qquad \text{الناتج } 3$$

2) $\frac{51^-}{8} = 6\frac{3}{8}^-$

$$\begin{array}{r|l} 8 & 51 \\ & \underline{48}\ - \\ & 3 \end{array} \qquad \text{الناتج } 6$$

ثم توضع الإشارة السالبة بعد إجراء عملية القسمة.

3) $-\frac{29}{6} = -4\frac{5}{6}$

$$\begin{array}{r|l} & 4 \\ \hline 6 & 29 \\ & \underline{24}\ - \\ & 5 \end{array}$$

مثال (2):

حوّل الأعداد الكسرية الآتية إلى كسور عادية :

1) $-1\frac{2}{5}$ 2) $3\frac{5}{9}$ 3) $-4\frac{2}{7}$

الحل :

1) $-1\frac{2}{5} = -\frac{(2+5\times1)}{5} = -\frac{7}{5}$

2) $3\frac{5}{9} = \frac{5+9\times3}{9} = \frac{32}{9}$

3) $-4\frac{2}{7} = -\frac{(2+7\times4)}{7} = -\frac{30}{7}$

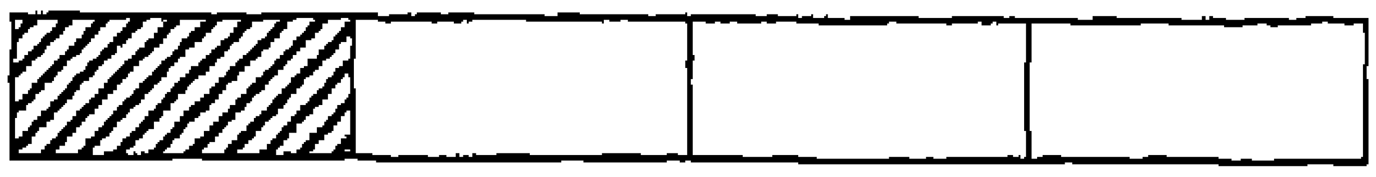
ملاحظة:

لاحظ ان $-1\frac{2}{5} = -\frac{7}{5}$

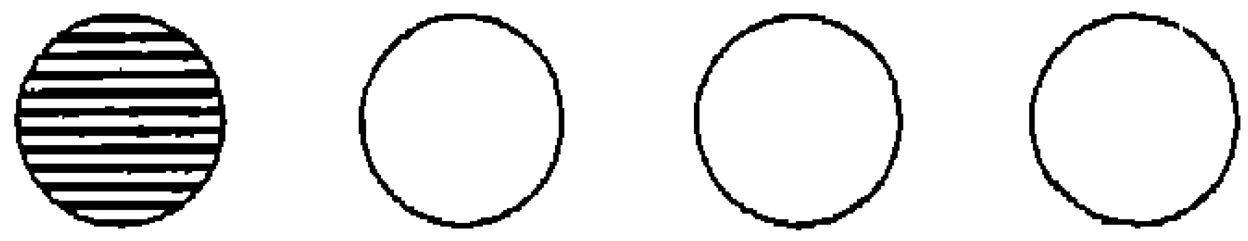
أي ان الإشارة السالبة هي للعدد الكسري كوحدة واحدة.

(2.3.8) تمثيل الكسور العادية:

يمكن تمثيل الكسر العادي على أساس جزء من شيء واحد أو جزء من مجموعة أجزاء متساوية ، فالكسر $\frac{1}{4}$ مثلاً يشكل جزءاً من مجموعة أجزاء متطابقة تم تجزيء الوحدة الواحدة لها، ويتضح ذلك من الشكل الآتي:

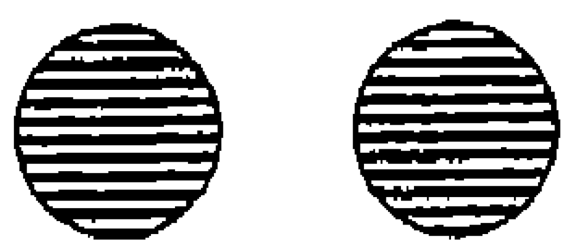
$\frac{1}{4}$ 

ويمكن أن يمثل الكسر $\frac{1}{4}$ على أنه وحدة واحدة من أصل أربعة أشياء متطابقة كما يتضح من الشكل الآتي:

$\frac{1}{4}$ 

أي يمثل الجزء المظلل $\frac{1}{4}$ المناطق الدائرية الأربعة المتطابقة.

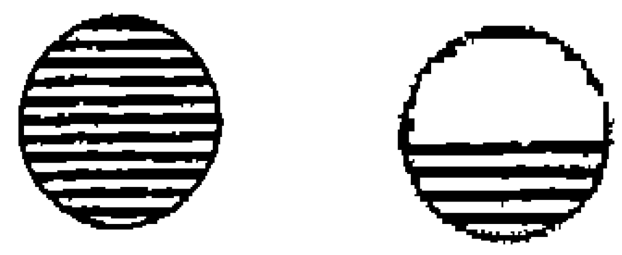
وأما الكسر العادي غير فعلي الذي يمثل عدداً صحيحاً مثل (2) فيمكن تمثيله بمنطقتين دائريتين متطابقتين كما في الشكل الآتي:

2 

وكذلك فإن الكسر العادي غير الحقيقي $\frac{3}{2}$ يشكل مرة ونصف من منطقة دائرية،

إذ أن $\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$

ويمثل كما في الشكل الآتي:



وهكذا، فإنه بالإمكان تمثيل أي كسر عادي فعلي أو غير فعلي من خلال الرسوم التوضيحية.

(3.3.8) الكسور العادية المتكافئة:

بملاحظة الشكلين (1)، (2) فإن الجزء المظلل في الشكل (1) يعبر عن

الكسر $\frac{2}{3}$ ، والجزء المظلل في الشكل (2) يعبر عن الكسر $\frac{4}{6}$.

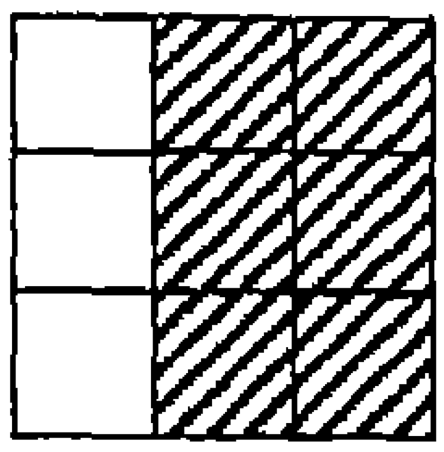


(2) (1)

ويمكن أن نلاحظ أن الجزء المظلل في الشكل (1) هو نفسه الجزء المظلل في الشكل (2) أي أن :

$$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

وبالمثل في الشكل (3)



(3)

فإن : $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9}$

وتسمى هذه الكسور بالكسور المتكافئة (الأعداد النسبية المتكافئة).

ملاحظة:

بما أن الكسور العادية هي أعداد نسبية؛ فبالإمكان الحصول على كسور عادية متكافئة كما في الأعداد النسبية المتكافئة، وذلك من خلال ضرب بسط الكسر ومقامه بالعدد نفسه.

مثال:

اكتب ثلاثة كسور متكافئة لكل كسر مما يأتي:

$$\frac{1}{4} \ ، \ \frac{-2}{5} \ ، \ \frac{3}{7}$$

الحل:

$$\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{3}{12} = \frac{4}{16}$$

$$\frac{-2}{5} = \frac{-6}{15} = \frac{-8}{20} = \frac{-14}{35}$$

$$\frac{3}{7} = \frac{-3}{-7} = \frac{6}{14} = \frac{9}{21}$$

(4.3.8) اختصار الكسور:

تعلم من مثال سابق أن $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$

لاحظ أن الكسر الثاني يمكن الحصول عليه من الكسر الأول بقسمة بسط الكسر ومقامه على 2 كالآتي:

$$\frac{3}{4} = \frac{2 \div 6}{2 \div 8} = \frac{6}{8}$$

قاعدة:

يمكن الحصول على كسر مكافئ لكسر معطى بقسمة بسطه ومقامه على العدد نفسه.

فمثلاً:

$$\frac{3}{6} = \frac{4 \div 16}{4 \div 24} = \frac{16}{24}$$

وأيضاً:

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \div 4}{2 \div 6} = \frac{4}{6}$$

نلاحظ مما سبق أننا قسمنا بسط الكسر ومقامه في كل مرة على أحد العوامل المشتركة وتسمى هذه العملية اختصار الكسور.

وبإمعان النظر في المثال السابق، نجد أن:

$$\frac{2}{3} = \frac{8 \div 16}{8 \div 24} = \frac{16}{24}$$

وأيضاً نلاحظ أن الكسر $\frac{2}{3}$ لا يمكن اختصاره لكسر آخر عن طريق القسمة ، فيكون الكسر بذلك في أبسط صورة، لأنه لا يوجد عامل مشترك بين البسط والمقام غير العدد (1).

وهذا يعني أن ق.م.أ للبسط والمقام هو العدد (1) ، وبالتالي لا يمكن اختصار الكسر $\frac{2}{3}$ لصورة أبسط من ذلك.

وإذا تساءلنا ما هو ق.م.أ للعددين 16 ، 24؟

فإن الإجابة ستكون ق.م.أ للعددين 16، 24 هو العدد 8، وبذلك فإنه يمكن اختصار الكسر إلى كسر مكافئ بأبسط صورة عن طريق قسمة البسط والمقام على ق.م.أ.

وعليه فإن الكسر يكون مكتوباً بأبسط صورة، عندما لا يوجد أي عامل مشترك بين بسطه ومقامه سوى العدد(1).

مثال:

اختصر الكسور الآتية إلى أبسط صورة:

(أ) $\frac{72}{54}$ (ب) $\frac{18}{30}$

الحل:

(أ) ق.م.أ للعددين 72 ، 54 هو 18

$\frac{72}{54} = \frac{72 \div 18}{54 \div 18} = \frac{4}{3}$ لاحظ أنه لا يوجد عامل (قاسم) مشترك بين البسط والمقام سوى العدد (1) ، فهو بأبسط صورة

ونكمل $\frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$

(ب) ق.م.أ للعددين 18 ، 30 هو 6

$\frac{18}{30} = \frac{18 \div 6}{30 \div 6} = \frac{3}{5}$ لاحظ أنه لا يوجد عامل مشترك بين البسط والمقام سوى العدد (1)، فهو بأبسط صورة

ويستفاد من الكسور العادية المتكافئة في تسهيل عمليتي الجمع والطرح لأنه يمكن تحويلها إلى كسور متشابهة كالآتي.

(5.3.8) الكسور العادية المتشابهة:

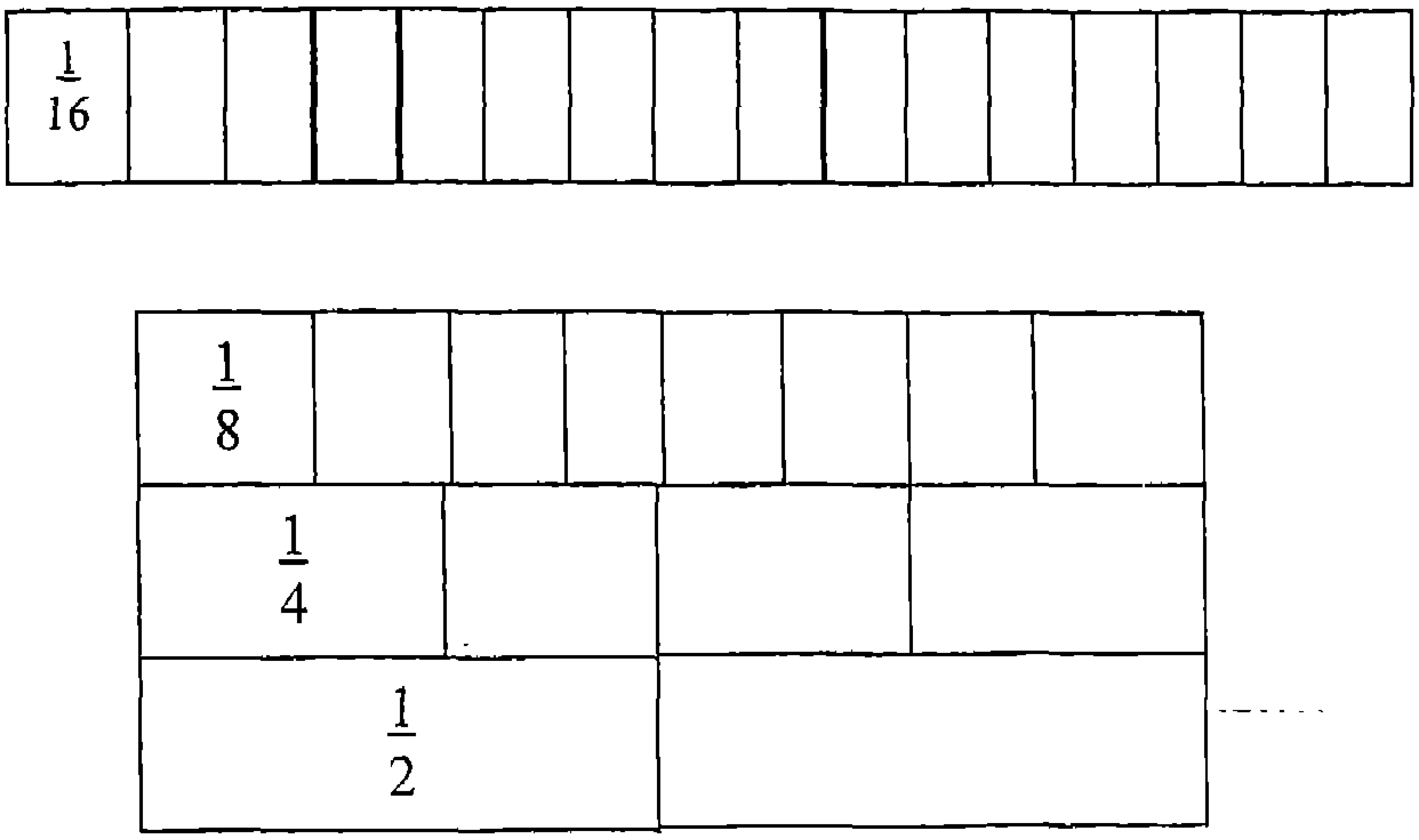
يتكون الكسر العادي من بسط ومقام يفصلهما خط الكسر كما سبق وذكرنا، وإذا تساوى مقاما كسرين عاديين ، فإنهما يسميان بالكسرين المتشابهين.

مثال: $\frac{1}{6}$ ، $\frac{2}{6}$ ، $\frac{5}{6}$ وغيرها

ويستفاد من الكسور العادية المتشابهة في مقارنة الكسور وجمعها وطرحها كما سيأتي لاحقاً.

(6.3.8) عائلات الكسور:

تعتبر الكسور $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{8}$ ، $\frac{1}{16}$ ،... من عائلة واحدة ، لأنه بقسمة ما يمثلها إلى جزئين متطابقين نحصل على الكسر التالي:



الشكل (8 :1) : عائلة الكسر $\frac{1}{2}$

وتشكل الكسور $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{6}$ ، $\frac{1}{12}$ ، $\frac{1}{24}$ عائلة كسرية أخرى ، وهكذا .....

ويستفاد من عائلة الكسر الواحد في المقارنة فيما بينها ، مثل:

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{2} \quad ، \quad \frac{1}{16} < \frac{1}{4}$$

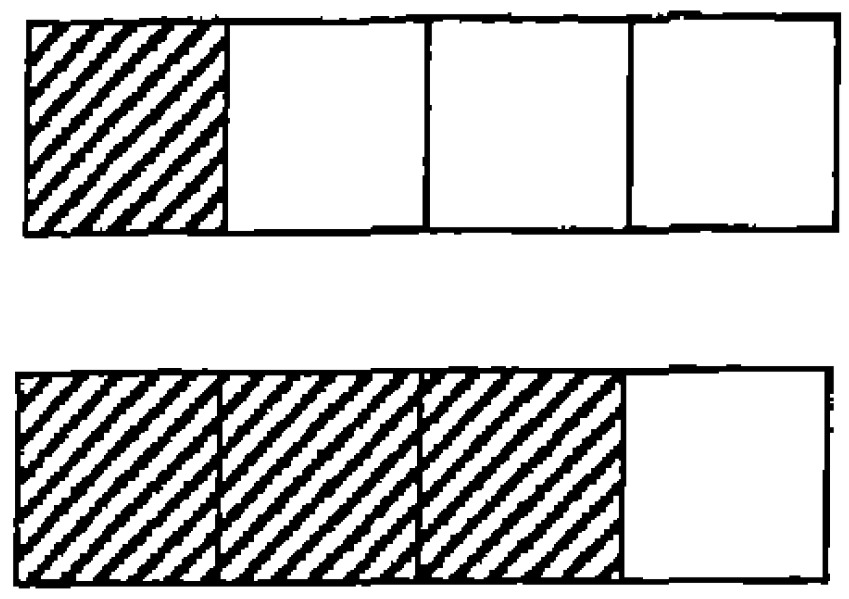
ويستفاد منها (لاحقاً) في إجراء عمليتي الجمع والطرح عليها.

(7.3.8) مقارنة الكسور العادية:

للمقارنة بين الكسرين $\frac{1}{4}$ ، $\frac{3}{4}$ يمكن ملاحظة الشكل الآتي:

$\frac{1}{4}$

$\frac{3}{4}$



ويلاحظ من الشكل أن $\frac{1}{4} < \frac{3}{4}$

أو $\frac{3}{4} > \frac{1}{4}$

وبشكل عام، لمقارنة كسرين متشابهين (لهما المقام نفسه) نقارن بين بسطي الكسرين.

أما لو أردنا مقارنة الكسرين $\frac{4}{7}$ ، $\frac{5}{8}$ فنحولهما إلى كسور متشابهة، كالآتي:

$$\frac{32}{56} = \frac{8\times4}{7\times7} = \frac{4}{7}$$

$$\frac{35}{56} = \frac{7\times5}{7\times8} = \frac{5}{8}$$

وحيث أن $35 > 32$ ، إذن $\frac{32}{56} < \frac{35}{56}$

أي أن $\frac{4}{7} < \frac{5}{8}$.

ويمكن مقارنة الكسرين $\frac{4}{7}$ ، $\frac{5}{8}$ من خلال إيجاد المضاعف المشترك الأصغر (م.م . أ) لمقاميهما ليصبحا كسرين متشابهين ومن ثم نقارن بينهما.

تدريب (1):

جد م.م.أ لمقامي الكسرين $\frac{4}{7}$ ، $\frac{5}{8}$ ثم قارن بينهما

تدريب (2):

رتب الكسور الآتية مرة تصاعدياً ، ومرة أخرى تنازلياً:

$\frac{9}{12}$ ، $\frac{2}{3}$ ، $\frac{7}{9}$ ، $\frac{3}{4}$

(4.8) العمليات الحسابية على الأعداد النسبية:

لقد عُرّفت مجموعة الأعداد النسبية على أنها:

ن = { م : م = $\frac{أ}{ب}$ ، أ ∋ ص ، ب ∋ ص* }

أي أن تعريف الأعداد النسبية اعتمد على الكسور العادية ، ومن هنا فإن العمليات على الأعداد النسبية التي سيتناولها هذا البند هي عمليات على الكسور العادية .

(1.4.8) عملية الجمع على الأعداد النسبية:

تعريف عملية جمع الأعداد النسبية:

إذا كان $\frac{أ}{ب}$ ، $\frac{جـ}{د}$ عددين نسبيين فإن :

$$\frac{أ}{ب} + \frac{جـ}{د} = \frac{أ \times د + ب \times جـ}{ب \times د}$$

ولتوضيح عملية الجمع نلاحظ الأمثلة الآتية:

(أ) ناتج جمع عددين نسبيين لهما المقام نفسه (كسرين عاديين متشابهين):

$$\frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{1 \times 5 + 5 \times 3}{5 \times 5}$$

$$= \frac{5 + 15}{25} = \frac{20}{25}$$

وباختصار $\frac{20}{25}$ إلى أبسط صورة

فإن $\frac{20}{25} = \frac{4}{5}$

وبإمعان النظر في المثال السابق يمكن الوصول لنفس النتيجة من خلال جمع بسط الكسر الأول مع بسط الكسر الثاني والمقام هو نفسه في ناتج الجمع لتساوي المقامات.

$$\frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{1 + 3}{5} = \frac{4}{5}$$

قاعدة:

إذا كان $\frac{أ}{ب}$ ، $\frac{جـ}{ب}$ عددين نسبيين فإن :

$$\frac{أ}{ب} + \frac{جـ}{ب} = \frac{أ+جـ}{ب}$$

(ب) ناتج جمع عددين نسبيين مقامهما غير متساوٍ:

$$\frac{5}{6} + \frac{11}{15} = \frac{11 \times 6 + 15 \times 5}{15 \times 6}$$

$$= \frac{66 + 75}{90} = \frac{641}{90} = \frac{47}{30}$$

تدريب (1) : حول الكسر $\frac{47}{30}$ إلى عدد كسري بقسمة بسطه على مقامه.

تدريب (2) : جد ناتج جمع $\frac{5}{6} + \frac{11}{15}$ من خلال تحويلهما إلى كسرين متشابهين .

(جـ) ناتج جمع عددين نسبيين أحدهما أو كلاهما هو عدد كسري:

لجمع - $4\frac{1}{6} + 5\frac{2}{3}$ نحول العددين الكسريين إلى عددين نسبيين على الصورة $\frac{أ}{ب}$

ثم نجري عملية الجمع:

$$-4\frac{1}{6} + 5\frac{2}{3} = \frac{-25}{6} + \frac{17}{3}$$

$$= \frac{(17\times 6) + (3\times(-25))}{3\times 6}$$

$$= \frac{102 + (-75)}{18}$$

$$= \frac{27}{18} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$$

تدريب (1): جد ناتج جمع عدد صحيح مع كسر، مثلاً $-5 + \frac{1}{2}$.

تدريب (2): هل بالإمكان جمع العددين النسبيين $\frac{5}{6}$ ، $\frac{3}{8}$ من خلال إيجاد المضاعف المشترك الأصغر (م.م.أ) لمقاميهما ؟ حاول إيجاد ناتج الجمع.

(2.4.8) عملية الطرح على الأعداد النسبية:

تعريف عملية طرح الأعداد النسبية:

إذا كان $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ ، $\frac{\text{جـ}}{\text{د}}$ عددين نسبيين فإن :

$$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} - \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}} + \frac{(-\text{جـ})}{\text{د}}$$

$$= \frac{\text{أ}\times\text{د} + (-\text{جـ}\times\text{ب})}{\text{ب}\times\text{د}}$$

$$= \frac{\text{أ}\times\text{د} - \text{جـ}\times\text{ب}}{\text{ب}\times\text{د}}$$

اي أن طرح عدد نسبي من آخر يكافئ جمع النظير الجمعي للعدد النسبي المطروح إلى المطروح منه.

مثال:

جد ناتج الطرح فيما يلي:

(أ) $\frac{7}{8} - \frac{2}{8}$

(ب) $\frac{2}{3} - \frac{-5}{7}$

(جـ) $6\frac{3}{5} - 4\frac{1}{4}$

الحل:

(أ) $\frac{7}{8} - \frac{2}{8} = \frac{7}{8} + \left(\frac{-2}{8}\right)$

$= \frac{7 + (-2)}{8} = \frac{5}{8}$

(ب) $\frac{2}{3} - \frac{-5}{7} = \frac{2}{3} +$ (معكوس $-\frac{5}{7}$)

$= \frac{5}{7} + \frac{2}{3}$

$= \frac{5 \times 3 + 7 \times 2}{7 \times 3}$

$= \frac{15 + 14}{21}$

$= \frac{29}{21}$

$= 1\frac{8}{21}$

ويقصد في هذا المثال بمعكوس العدد النظير الجمعي له.

(جـ) $\frac{17}{4} - \frac{33}{5} = 4\frac{1}{4} - 6\frac{3}{5}$

$$= \frac{5 \times 17 - 4 \times 33}{4 \times 5}$$

$$= \frac{85 - 132}{20}$$

$$= \frac{47}{20} = 2\frac{7}{20}$$

(3.4.8) عملية الضرب على الأعداد النسبية:

تعريف عملية ضرب الأعداد النسبية :

إذا كان $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ ، $\frac{\text{جـ}}{\text{د}}$ عددين نسبيين فإن :

$$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} \times \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \frac{\text{أ} \times \text{جـ}}{\text{ب} \times \text{د}}$$

مثال:

جد ناتج ضرب ما يلي:

(أ) $6 \times \frac{-5}{9}$

(ب) $\frac{-3}{4} \times \frac{2}{3}$

(جـ) $\frac{-3}{7} \times -1\frac{1}{2}$

الحل : (أ) $-\frac{5}{9} \times 6 = -\frac{5}{9} \times \frac{6}{1}$

$= -\frac{6 \times 5}{1 \times 9}$

$= -\frac{30}{9}$

$= -\frac{10}{3}$

$= -3\frac{1}{3}$

(ب) $\frac{2}{3} \times -\frac{3}{4} = \frac{-3 \times 2}{4 \times 3}$

$= -\frac{6}{12}$

$= -\frac{1}{2}$

(جـ) $-1\frac{1}{2} \times -\frac{3}{7} = -\frac{1 \times 2 + 1}{2} \times -\frac{3}{7}$

$= -\frac{3}{2} \times -\frac{3}{7}$

$= \frac{-3 \times -3}{7 \times 2}$

$= \frac{9}{14}$

(4.4.8) عملية القسمة على الأعداد النسبية:

تعريف عملية قسمة الأعداد النسبية:

إذا كان $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ ، $\frac{\text{جـ}}{\text{د}} \ni$ ن ، $\frac{\text{جـ}}{\text{د}} \neq$ صفر فإن:

$$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} \div \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}} \times \frac{\text{د}}{\text{جـ}}$$

ملاحظة:

لاحظ أن $\frac{\text{جـ}}{\text{د}} \neq$ صفر شرط أساسي لإيجاد ناتج القسمة في الأعداد النسبية.

إذ لا يجوز أن يكون المقسوم عليه في عملية القسمة مساوياً للصفر حتى لا يكون الناتج قيمة غير معرفة.

مثال:

جد ناتج القسمة فيما يأتي:

(أ) $\frac{9}{10} \div \frac{1}{5}$ (ب) $-\frac{10}{7} \div -\frac{5}{14}$

الحل:

(أ) $\frac{9}{10} \div \frac{1}{5} = \frac{9}{10} \times \frac{5}{1}$

$$= \frac{5 \times 9}{1 \times 10} = \frac{45}{10} = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$$

(ب) $-\frac{10}{7} \div -\frac{5}{14} = -\frac{10}{7} \times -\frac{14}{5}$

$= \frac{-10 \times 14}{7 \times -5}$

$= \frac{-140}{-35} = \frac{20}{5} = 4$

(5.8) خصائص العمليات الحسابية على الأعداد النسبية:

(1.5.8) خصائص عملية الجمع على الاعداد النسبية:

1) خاصية الانغلاق:

إذا كان $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ ، $\frac{\text{جـ}}{\text{د}}$ $\in$ ن ، فإن:

$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} + \frac{\text{جـ}}{\text{د}} \in$ ن

أي أن ناتج جمع أي عددين نسبيين هو عدد نسبي ، ولذا فإن مجموعة الأعداد النسبية مغلقة تحت عملية الجمع.

مثال:

تحقق من انغلاقية الجمع من خلال الأمثلة الآتية:

(أ) $\frac{2}{5} + \frac{1}{5}$ (ب) $\frac{2}{3} + -\frac{4}{5}$ (جـ) $\frac{3}{4}$ + صفر

الحل:

(أ) $\frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5} \in$ ن

(ب) $\frac{2}{3} + \frac{-4}{5} = \frac{2 \times 5 + 3 \times -4}{3 \times 5}$

$= \frac{10 + -12}{15} = \frac{-2}{15} \in$ ن

(جـ) $\frac{3}{4} +$ صفر $= \frac{3}{4} \in$ ن

سؤال:

إذا كانت ن* = ن − {0} فهل ن* مغلقة تحت عملية الجمع .

2) الخاصية الإبدالية:

إذا كان $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ ، $\frac{\text{جـ}}{\text{د}} \in$ ن ، فإن :

$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} + \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}} + \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$.

أو $\frac{\text{أ د + ب جـ}}{\text{ب د}} = \frac{\text{جـ ب × د أ}}{\text{د ب}}$

مثال:

تحقق من صحة الخاصية الإبدالية في الجمعلكل مما يأتي:

(أ) $\frac{8}{24} + \frac{3}{24} \stackrel{?}{=} \frac{3}{24} + \frac{8}{24}$

(ب) $\frac{-1}{3} + \frac{1}{4} \overset{?}{=} \frac{1}{4} + (\frac{-1}{3})$

الحل:

$$\frac{8}{24} + \frac{3}{24} = \frac{11}{24}$$

$$\frac{3}{24} + \frac{8}{24} = \frac{11}{24}$$

إذن $\frac{8}{24} + \frac{3}{24} = \frac{3}{24} + \frac{8}{24}$

(ب) $\frac{-1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{(-1 \times 4) + (3 \times 1)}{3 \times 4}$

$$= \frac{-4 + 3}{12} = \frac{-1}{12}$$

$$\frac{1}{4} + (\frac{-1}{3}) = \frac{(4 \times -1) + (1 \times 3)}{4 \times 3}$$

$$= \frac{-4 + 3}{12} = \frac{-1}{12}$$

إذن $\frac{-1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + (\frac{-1}{3})$

3) الخاصية التجميعية:

إذا كان $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ ، $\frac{\text{جـ}}{\text{د}}$ ، $\frac{\text{هـ}}{\text{و}}$ $\in$ ن ، فإن:

$$(\frac{\text{أ}}{\text{ب}} + \frac{\text{جـ}}{\text{د}}) + \frac{\text{هـ}}{\text{و}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}} + (\frac{\text{جـ}}{\text{د}} + \frac{\text{هـ}}{\text{و}})$$

مثال:

تحقق من صحة الخاصية التجميعية فيما يلي:

(أ) $\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)+\frac{2}{3} \stackrel{?}{=} \frac{3}{4}+\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)$

(ب) $\left(3+\frac{3}{2}\right)+1\frac{1}{2} \stackrel{?}{=} 3+\left(\frac{3}{2}+1\frac{1}{2}\right)$

الحل:

(أ) الطرف الأيمن $= \frac{3}{4}+\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right) = \frac{3}{4}+\left(\frac{1\times 3+2\times 2}{2\times 3}\right)$

$= \frac{3}{4}+\left(\frac{3+4}{6}\right)$

$= \frac{3}{4}+\frac{7}{6}$

$= \frac{3\times 6+4\times 7}{4\times 6}$

$= \frac{18+28}{24} = \frac{46}{24} = \frac{23}{12}$

الطرف الأيسر $= \left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)+\frac{2}{3} = \frac{3\times 2+1\times 4}{4\times 2}+\frac{2}{3}$

$= \frac{6+4}{8}+\frac{2}{3}$

$= \frac{10}{8}+\frac{2}{3}$

$= \frac{10\times 3+8\times 2}{8\times 3}$

$= \frac{30+16}{24} = \frac{46}{24} = \frac{23}{12}$

إذن: الطرفان متساويان.

(ب) الطرف الأيمن = $3 + \left(\frac{3}{2} + 1\frac{1}{2}\right)$

$$3 + \left(\frac{3}{2} + \frac{1 + 1 \times 2}{2}\right) =$$

$$3 + \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\right) =$$

$$\frac{3}{1} + \frac{6}{2} =$$

$$\frac{3 \times 2 + 1 \times 6}{1 \times 2} =$$

$$6 = \frac{12}{2} = \frac{6 + 6}{2} =$$

الطرف الأيسر = $\left(3 + \frac{3}{2}\right) + 1\frac{1}{2}$

$$\left(\frac{3}{1} + \frac{3}{2}\right) + 1\frac{1}{2} =$$

$$\left(\frac{3 \times 2 + 1 \times 3}{1 \times 2}\right) + 1\frac{1}{2} =$$

$$\left(\frac{6 + 3}{2}\right) + 1\frac{1}{2} =$$

$$\frac{9}{2} + 1\frac{1}{2} =$$

$$\frac{9}{2} + \frac{1 + 1 \times 2}{2} =$$

$$\frac{9}{2} + \frac{3}{2} =$$

$$6 = \frac{12}{2} =$$

إذن: الطرفان متساويان .

4) خاصية العنصر المحايد في عملية الجمع على الأعداد النسبية:

العنصر المحايد لعملية الجمع على مجموعة الأعداد النسبية هو الصفر،

لأنه إذا كان $\frac{أ}{ب} \in$ ن ، فإن :

$$\frac{أ}{ب} + \text{صفر} = \text{صفر} + \frac{أ}{ب} = \frac{أ}{ب}$$

مثال:

تحقق من أن الصفر يمثل عنصراً محايداً في عملية جمع الأعداد النسبية الآتية:

(أ) $\frac{-5}{6}$

(ب) $\frac{3}{8}$

الحل:

(أ) $\frac{-5}{6} + \text{صفر} = \frac{-5}{6}$

$\text{صفر} + \frac{-5}{6} = \frac{-5}{6}$

(ب) $\frac{3}{8} + \text{صفر} = \frac{3}{8}$

$\text{صفر} + \frac{3}{8} = \frac{3}{8}$

5) خاصية النظير الجمعي للأعداد النسبية:

إذا كان $\frac{أ}{ب} \in$ ن ، فإنه يوجد نظير جمعي $-\frac{أ}{ب}$ بحيث أن:

$$\frac{أ}{ب} + \frac{-أ}{ب} = \frac{-أ}{ب} + \frac{أ}{ب} = \text{صفر}$$

ويسمى النظير الجمعي للعدد $\frac{أ}{ب}$ وهو $(\frac{-أ}{ب})$ بمعكوس العدد أي عكسه في الإشارة .

مثال:

ما هو النظير الجمعي (المعكوس) للأعداد النسبية الآتية ، وتحقق من ذلك ؟

(أ) $-\frac{3}{7}$ (ب) $1\frac{1}{3}$

الحل:

(أ) النظير الجمعي للعدد $-\frac{3}{7}$ هو $+\frac{3}{7}$

حيث أن : $-\frac{3}{7} + \frac{3}{7} =$ صفر

كذلك ، $\frac{3}{7} + -\frac{3}{7} =$ صفر

(ب) النظير الجمعي للعدد $1\frac{1}{3}$ هو $-1\frac{1}{3}$

حيث أن: $1\frac{1}{3} + (-1\frac{1}{3}) =$ صفر

كذلك ، $-1\frac{1}{3} + 1\frac{1}{3} =$ صفر

(2.5.8) خصائص عملية الطرح على الأعداد النسبية:

(1) خاصية الانغلاق:

إن مجموعة الأعداد النسبية مغلقة تحت عملية الطرح، إذ أنه:

إذا كان $\frac{أ}{ب}$ ، $\frac{جـ}{د} \in ن$ ، فإن :

$$\frac{أ}{ب} - \frac{جـ}{د} \in ن .$$

مثال:

تحقق من انغلاقية الطرح فيما يأتي:

$$\frac{3}{7} - \frac{-5}{7}$$

الحل :

$\frac{3}{7}$ ، $\frac{-5}{7} \in ن$

$$\frac{3}{7} - \frac{-5}{7} = \frac{3}{7} + \frac{5}{7}$$

$$= \frac{8}{7} \in ن$$

أما بالنسبة لبقية الخصائص ، فإن عملية الطرح على الأعداد النسبية ليست تبديلية ولا تجميعية.

مثال:

بين بأمثلة عددية أن عملية الطرح على مجموعة الأعداد النسبية ليست تبديلية وليست تجميعية.

الحل:

عملية الطرح ليست تبديلية:

$$\frac{2 + \times 8 + 7 \times 3}{7 \times 8} = \frac{2}{7} - \frac{3}{8}$$

$$\frac{16 - 21}{56} =$$

$$\frac{5}{56} =$$

في حين أن $\frac{3 \times 7 - 8 \times 2}{8 \times 7} = \frac{3}{8} - \frac{2}{7}$

$$\frac{21 - 16}{56} =$$

$$\frac{5 -}{56} =$$

إذن $\frac{3}{8} - \frac{2}{7} \neq \frac{2}{7} - \frac{3}{8}$

عملية الطرح ليست تجميعية:

$$\frac{3}{8} - \left\{\frac{1 \quad -4}{8}\right\} = \frac{3}{8} - \left\{\frac{1}{8} - \frac{4}{8}\right\}$$

$$= \frac{\text{صفر}}{8}$$

$$= \text{صفر}$$

في حين أن $\left\{\frac{3}{8} - \frac{1}{8}\right\} - \frac{4}{8} = \left\{\frac{3-1}{8}\right\} - \frac{4}{8}$

$$= \frac{2\ -}{8} - \frac{4}{8}$$

$$= \frac{2 + 4}{8}$$

$$= \frac{6}{8}$$

إذن $\frac{3}{8} - \left\{\frac{1}{8} - \frac{4}{8}\right\} \neq \frac{3}{8} - \left\{\frac{1}{8} - \frac{4}{8}\right\}$

سؤال : (أ) هل يوجد عنصر محايد في عملية طرح الأعداد النسبية ؟ وضح ذلك.

(ب) هل يوجد للأعداد النسبية نظير في عملية الطرح ؟ وضح ذلك.

(3.5.8) خصائص عملية الضرب على الأعداد النسبية:

(1) خاصية الانغلاق:

إذا كان $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ ، $\frac{\text{جـ}}{\text{د}} \in$ ن ، فإن :

$$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} \times \frac{\text{جـ}}{\text{د}} \in \text{ن}$$

أي أن ناتج ضرب أي عددين نسبيين هو عدد نسبي ، ولذا فإن مجموعة الأعداد النسبية مغلقة تحت عملية الضرب.

مثال:

تحقق من انغلاقية الضرب فيما يأتي:

$$\frac{2}{7} \text{ ، } \frac{5}{9}$$

الحل:

$$\frac{2}{7} \times \frac{5}{9} = \frac{5 \times 2}{9 \times 7}$$

$$= \frac{10}{63} \in \text{ن}$$

(2) الخاصية الابدالية:

إذا كان $\frac{أ}{ب}$ ، $\frac{جـ}{د}$ $\in$ ن ، فإن :

$$\frac{أ}{ب} \times \frac{جـ}{د} = \frac{جـ}{د} \times \frac{أ}{ب}$$

مثال:

تحقق من صحة الخاصية الإبدالية فيما يأتي:

$$\frac{2}{7} \times \frac{-3}{8} \overset{?}{=} \frac{-3}{8} \times \frac{2}{7}$$

الحل:

$$\frac{2}{7} \times \frac{-3}{8} = \frac{-3 \times 2}{8 \times 7}$$

$$= \frac{-6}{56}$$

كذلك $\frac{-3}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{2 \times -3}{8 \times 7}$

$$= \frac{-6}{56}$$

إذن $\frac{2}{7} \times \frac{-3}{8} = \frac{-3}{8} \times \frac{2}{7}$

(3) الخاصية التجميعية:

إذا كان $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ ، $\frac{\text{جـ}}{\text{د}}$ ، $\frac{\text{هـ}}{\text{و}}$ $\in$ ن ، فإن :

$$\left\{\frac{\text{أ}}{\text{ب}} \times \frac{\text{جـ}}{\text{د}}\right\} \times \frac{\text{هـ}}{\text{و}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}} \times \left\{\frac{\text{جـ}}{\text{د}} \times \frac{\text{هـ}}{\text{و}}\right\}$$

مثال:

تحقق من صحة الخاصية التجميعية فيما يأتي:

$$3 \times \left\{\frac{1}{2} \times 1\frac{1}{2}\right\} \stackrel{?}{=} \left\{3 \times \frac{1}{2}\right\} \times 1\frac{1}{2}$$

الحل:

الطرف الأيمن $= 3 \times \left(\frac{1}{2} \times 1\frac{1}{2}\right)$

$= 3 \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{1 + 1 \times 2}{2}\right)$

$= \frac{3}{1} \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{2}\right)$

$= \frac{3}{1} \times \left(\frac{1 \times 3}{2 \times 2}\right)$

$= \frac{3}{1} \times \frac{3}{4}$

$= \frac{3 \times 3}{1 \times 4} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$

الطرف الأيسر = $\left(3 \times \frac{1}{2}\right) \times 1\frac{1}{2}$

$= \left(\frac{3 \times 1}{1 \times 2}\right) \times 1\frac{1}{2}$

$= \frac{3}{2} \times \frac{1 + 1 \times 2}{2}$

$= \frac{3}{2} \times \frac{3}{2}$

$= \frac{2 \times 3}{2 \times 2}$

$= \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$

إذن: الطرفان متساويان .

(4) خاصية العنصر المحايد في عملية الضرب على الأعداد النسبية:

العنصر المحايد لعملية الضرب على مجموعة الأعداد النسبية هو (1) ، لأنه

إذا كان $\frac{أ}{ب} \in$ ن ، فإن :

$\frac{أ}{ب} \times 1 = 1 \times \frac{أ}{ب} = \frac{أ}{ب}$

مثال :

تحقق من ان العدد (1) يمثل عنصراً محايداً في عملية الضرب للأعداد النسبية الآتية:

أ) $-\frac{3}{7}$ ب) $1\frac{5}{6}$

الحل:

أ) $1 \times \frac{-3}{7} = \frac{-3}{7} \times 1 = \frac{-3}{7}$

ب) $1 \times 1\frac{5}{6} = 1\frac{5}{6} \times 1 = 1\frac{5}{6}$

(5) خاصية النظير الضربي للأعداد النسبية:

إذا كان $\frac{أ}{ب} \in$ ن ، $\frac{أ}{ب} \neq$ صفر، فإنه يوجد له نظيرضربي $\frac{ب}{أ}$ بحيث أن:

$$\frac{أ}{ب} \times \frac{ب}{أ} = \frac{ب}{أ} \times \frac{أ}{ب} = 1$$

ويسمى النظير الضربي للعدد $\frac{أ}{ب}$ وهو $\frac{ب}{أ}$ مقلوب العدد ،أي يقلب البسط والمقام .

ملاحظة:

لاحظ أن $\frac{أ}{ب} \neq$ صفر شرط أساسي لوجود نظير ضربي في ن ،إذ لو كان $\frac{أ}{ب} =$ صفر

فإن مقلوب العدد صفر هو ($\frac{1}{صفر} = \infty$) أي قيمة غير معرّفة ، أي أن الصفر ليس له نظير ضربي

وبالتالي ، فإن عملية الضرب يوجد لها نظير ضربي في ن* (أي في مجموعة الأعداد النسبية عدا الصفر) .

مثال:

ما هو النظير الضربي (المقلوب) للأعداد النسبية الآتية ، وتحقق من ذلك.

أ) $\frac{3}{5}$ ب) $-\frac{2}{7}$

الحل :

أ) النظير الضربي للعدد $\frac{3}{5}$ هو $\frac{5}{3}$

حيث أن $\frac{3}{5} \times \frac{5}{3} = 1$

ب) النظير الضربي للعدد $\frac{2-}{7}$ هو $\frac{7}{2-}$

حيث أن $\frac{2-}{7} \times \frac{7}{2-} = \frac{7 \times 2-}{2- \times 7} = \frac{14-}{14-} = 1$

(6) خاصية توزيع الضرب على كل من الجمع والطرح في مجموعة الأعداد النسبية:

إذا كان $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ ، $\frac{\text{جـ}}{\text{د}}$ ، $\frac{\text{هـ}}{\text{و}}$ $\in$ ن ، فإن :

$$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} \times \left\{\frac{\text{جـ}}{\text{د}} \pm \frac{\text{هـ}}{\text{و}}\right\} = \left\{\frac{\text{أ}}{\text{ب}} \times \frac{\text{جـ}}{\text{د}}\right\} \pm \left\{\frac{\text{أ}}{\text{ب}} \times \frac{\text{هـ}}{\text{و}}\right\}$$

مثال (1):

تحقق من صحة الخاصية التوزيعية فيما يلي:

$$\left(\frac{3}{5}\times\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{-1}{2}\times\frac{2}{3}\right)\overset{?}{=}\left(\frac{3}{5}+\frac{-1}{2}\right)\times\frac{2}{3}$$

الحل: الطرف الأيمن $=\left(\frac{3}{5}+\frac{-1}{2}\right)\times\frac{2}{3}$

$$=\left(\frac{3\times 2+5\times -1}{5\times 2}\right)\times\frac{2}{3}$$

$$=\frac{(6+-5)}{10}\times\frac{2}{3}$$

$$=\frac{1}{10}\times\frac{2}{3}$$

$$=\frac{1\times 2}{10\times 3}=\frac{2}{30}=\frac{1}{15}$$

الطرف الأيسر: $=\left(\frac{3}{5}\times\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{-1}{2}\times\frac{2}{3}\right)$

$$=\left(\frac{3\times 2}{5\times 3}\right)+\left(\frac{-1\times 2}{2\times 3}\right)$$

$$=\frac{6}{15}+\frac{-2}{6}$$

$$=\frac{6\times 6+15\times -2}{15\times 6}$$

$$=\frac{36+-30}{90}=\frac{+6}{90}=\frac{1}{15}$$

إذن الطرفان متساويان

مثال (2):

استخدم خاصية توزيع الضرب على الجمع في إيجاد ناتج

$9 \times 2\frac{1}{3}$ ، ثم تحقق من صحة حلك.

الحل:

$$\left(2 + \frac{1}{3}\right) \times 9 = 2\frac{1}{3} \times 9$$

$$= 2 \times 9 + \frac{1}{3} \times \frac{9}{1}$$

$$= \frac{18}{1} + \left(\frac{1 \times 9}{3 \times 1}\right)$$

$$= \frac{18}{1} + \frac{9}{3}$$

$$= \frac{18 \times 3 + 1 \times 9}{1 \times 3}$$

$$= \frac{54 + 9}{3} = \frac{63}{3} = 21$$

التحقق من الحل:

$$\frac{1 + 2 \times 3}{3} \times 9 = 2\frac{1}{3} \times 9$$

$$= \frac{7}{3} \times 9$$

$$= \frac{63}{3} = 21$$ إذن: الحل صحيح

(4.5.8) خصائص عملية القسمة على الأعداد النسبية:

(1) خاصية الانغلاق:

إذا كان $\frac{أ}{ب}$ ، $\frac{جـ}{د}$ ∋ ن* ، فإن :

$\frac{أ}{ب} \div \frac{جـ}{د}$ ∋ ن*

أي أن عملية القسمة تحقق خاصية الانغلاق على ن* (مجموعة الأعداد النسبية عدا الصفر)، إذ أن من شروط عملية القسمة أن لا يكون المقسوم عليه صفراً.

أما بالنسبة لبقية الخصائص، فإن عملية القسمة على الأعداد النسبية كالطرح على الأعداد النسبية ليست تبديلية وليست تجميعية.

تدريب:

بين بأمثلة عددية أن عملية القسمة على مجوعة الأعداد النسبية ليست تبديلية وليست تجميعية.

كذلك لا يوجد عنصر محايد في عملية قسمة الأعداد النسبية ،وبالتالي لا يوجد نظير، والمثال الآتي يوضح ذلك:

إذا افترضنا أن العدد (1) هو العنصر المحايد في عملية القسمة ، نجد أن ذلك غير صحيح لأن:

$$\frac{3}{5} \div \frac{1}{1} = \frac{3}{5} \times \frac{1}{1} = \frac{3}{5}$$

ولكن $1 \div \frac{3}{5} = 1 \times \frac{5}{3} = \frac{5}{3}$

إذن $\frac{3}{5} \neq \frac{5}{3}$

وبالتالي لا يمكن القول إن العدد (1) هو محايد في عملية القسمة، ومن ثم فإنه لا يوجد نظير ضربي في عملية قسمة الأعداد النسبية لعدم وجود محايد بالأصل.

❖ويمكن توضيح خصائص العمليات الحسابية على ن من خلال الجدول الآتي :

العملية الثنائية / الخاصية	(ن ، +)	(ن ، -)	(ن ، ×)	(ن ، ÷)
الانغلاق	✓	✓	✓	×
الإبدالية	✓	×	✓	×
التجميعية	✓	×	✓	×
التوزيعية	×	×	تتوزع عملية الضرب على كل من الجمع والطرح	×
المحايد	الصفر	×	1	×
النظير	✓	×	×	×

(6.8) تمارين ونشاطات:

1. ضع إشارة (×) على رمز الإجابة الصحيحة في كل مما يلي :

1) $-\frac{3}{7} + -\frac{5}{6} =$

أ) $-\frac{8}{13}$ ب) $-\frac{8}{42}$ جـ) $-\frac{53}{42}$ د) $\frac{53}{42}$

2) الكسر الأكبر بين الكسور $\frac{1}{5}$ ، $\frac{4}{25}$ ، $\frac{7}{50}$ ، $\frac{13}{100}$ هو :

أ) $\frac{1}{5}$ ب) $\frac{4}{25}$ جـ) $\frac{7}{50}$ د) $\frac{13}{100}$

3) $\frac{1}{2} + \frac{1}{7} =$

أ) $\frac{2}{9}$ ب) $\frac{9}{14}$ جـ) $\frac{2}{7}$ د) $\frac{5}{14}$

4) (ن ، -) تحقق الخاصية :

أ) الإبدالية ب) التجميعية جـ) المحايد د) الانغلاقية

5) $-\frac{3}{2} + 1\frac{1}{2} =$

أ) $\frac{1}{2}$ ب) صفر جـ) 3 د) 1

6) $\frac{5}{2}$ ، $\frac{5}{3}$ كسران عاديان:

أ)متكافئان   ب) متشابهان   جـ)حقيقيان   د)غير حقيقين

7) $\frac{3}{7}$ ، $\frac{-9}{-21}$ كسران عاديان :

أ)متكافئان   ب) متشابهان   جـ) غير متساويين   د)غير فعليين

8) $1\frac{1}{4} + -\frac{7}{2} =$

أ) $-1\frac{7}{6}$ ب) $-\frac{9}{4}$ جـ) $\frac{19}{4}$ د) $-\frac{13}{4}$

9) $5\frac{1}{4} \times -\frac{6}{21} =$

أ) $\frac{1}{7}$ ب) $-5\frac{1}{7}$ جـ) $-\frac{3}{2}$ د) $-\frac{2}{3}$

10) $-\frac{3}{8} + \frac{9}{16} =$

أ) $-\frac{2}{3}$ ب) $\frac{3}{2}$ جـ) $-\frac{3}{2}$ د) $\frac{3}{2}$

11) $2\frac{1}{4} =$

أ) $\frac{5}{4}$ ب) $\frac{7}{4}$ جـ) $\frac{9}{4}$ د) $\frac{3}{4}$

12) $\frac{1}{5} \times -5 =$

أ) 5		ب) -5		جـ) 1		د) -1

13) إذا كان $(5 \times أ) \times -\frac{3}{4} = 5 \times (أ \times -\frac{3}{4})$ فإن هذا يحقق الخاصية :

أ) التجميعية في الجمع

ب) التجميعية في الضرب

جـ) التوزيعية للضرب على الجمع

د) التوزيعية للجمع على الضرب

14) الخاصية التي تحقق جـ + صفر = صفر + جـ = جـ ، لكل جـ ∋ ن هي:

أ) المحايد الجمعي

ب) المحايد الضربي

جـ) النظير الجمعي

د) النظير الضربي

15) النظير الجمعي للعدد $-3\frac{1}{2}$ هو :

أ) $-\frac{7}{2}$		ب) $+\frac{7}{2}$		جـ) $-\frac{2}{7}$		د) $\frac{2}{7}$

16) النظير الضربي للعدد $5\frac{3}{4}$ هو :

أ) $\frac{23}{4}$　　ب) $\frac{19}{4}$　　جـ) $-\frac{4}{23}$　　د) $\frac{4}{23}$

17) $5\frac{1}{2} + \frac{1}{2} =$

أ) 5　　ب) 6　　جـ) $\frac{2}{12}$　　د) $-\frac{2}{12}$

18) $-6 \div -\frac{1}{4} =$

أ) -24　　ب) 24　　جـ) $\frac{6}{4}$　　د) $\frac{6}{4}$

19) العنصر المحايد في عملية ضرب الأعداد النسبية هو :

أ) الصفر　　ب) 1　　جـ) -1　　د) لا يوجد محايد

20) العدد النسبي الذي ليس له نظير ضربي هو :

أ) 1　　ب) 1 ، -1　　جـ) صفر　　د) 10

2. حول الكسور العادية غير الفعلية الآتية إلى أعداد كسرية :

أ) $\frac{45}{4}$ ب) $- \frac{7}{25}$ جـ) $- \frac{26}{7}$ د) $\frac{59}{8}$

3. حول الأعداد الكسرية غير الفعلية الآتية إلى كسور عادية:

أ) $2\frac{1}{2}$ ب) $- 6\frac{5}{7}$ جـ) $- 3\frac{3}{4}$ د) $8\frac{7}{9}$

4. جد ناتج ما يلي بأبسط صورة :

$\frac{2}{2} - + 1\frac{5}{9}$ (1

$\frac{7}{8} + (5 - + 1\frac{1}{4})$ (2

$\frac{1}{4} - \frac{5}{8}$ (3

$\frac{3}{4} - \times 3$ (4

$3\frac{1}{4} \times \frac{5}{6} -$ (5

$\frac{2}{3} \div 1$ (6

$1\frac{7}{8} - \div \frac{5}{7} -$ (7

$5 \div 1\frac{1}{4} -$ (8

5. ما هو النظير الجمعي للأعداد النسبية الآتية:

أ) $-\frac{3}{4}$

ب) 1

جـ) 5

د) $1\frac{2}{3}$

هـ) $-4\frac{5}{4}$

6. ما هو النظير الضربي للأعداد النسبية الآتية:

أ) $+\frac{3}{5}$

ب) -1

جـ) صفر

د) $-1\frac{2}{9}$

هـ) $-\frac{3}{8}$

7. اكتب خمسة كسور مكافئة لكل كسر مما يأتي :

أ) - $\frac{8}{9}$

ب) $\frac{25}{100}$

جـ) - $\frac{1}{3}$

د) $\frac{7}{9}$

8. اختصر كلاً من الكسور الآتية إلى أبسط صورة:

أ) $\frac{25}{75}$

ب) - $\frac{9}{81}$

جـ) $\frac{14}{38}$

د)- $\frac{24}{48}$

الفصل التاسع

الأعداد الحقيقية

الأعداد الحقيقية

(1.9) مقدمة:

يتناول هذا الفصل في بنوده الأولى الكسور العشرية باعتبار بعضها مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد النسبية، وبعضها الآخر يمثل أعداداً غير نسبية، ومن ثم تتناول البنود الأخرى مجموعة الأعداد الحقيقية الناتجة عن اتحاد المجموعتين السابقتين (الأعداد النسبية والأعداد غير النسبية) والعمليات على الأعداد الحقيقية وخصائصها.

(2.9) الكسور العشرية:

تعد الكسور العشرية مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد النسبية، وإحدى صور التعبير عنها، إذ تسمى الكسور العادية التي مقاماتها قوى العدد (10) كسوراً عشرية، وهي امتداد للكسور العادية ومكملة لها.

فالكسر $\frac{4}{10}$ يُقرأ أربعة من عشرة ويكتب 0.4

والكسر $\frac{9}{100}$ يُقرأ تسعة من مائة ويكتب 0.09

والكسر $\frac{5}{1000}$ يُقرأ خمسة من ألف ويكتب 0.005

وعندما يكون الكسر أكبر من (1) ، فإنه يمكن كتابته على شكل كسر عشري كما في الأمثلة الآتية:

$\frac{18}{10} = 1\frac{8}{10} = 1.8$ ويُقرأ واحد وثمانية من عشرة .

(لاحظ أن $\frac{16}{10} = \frac{6}{10} + \frac{10}{10}$)

كذلك $\frac{4352}{1000} = 4.352$ ويُقرأ أربعة وثلاثمائة واثنان وخمسون من ألف

وبالإمكان ملاحظة أن :

$$0.6 = \frac{6}{10} = \frac{60}{100} = 0.60$$

أي أننا حولنا 6 أجزاء من عشرة إلى 60 جزء من مئة.

وعليه فإن: $0.6 = 0.60 = 0.600 = 0.6000$ وهكذا ...

ويطلق على هذه الكسور العشرية مصطلح " كسور عشرية متكافئة "، أي أن الاصفار التي في نهاية الكسر العشري (إلى يمينه) لا تؤثر على قيمة الكسر العشري.

خلاصة:

إن الكسر العشري هو مصطلح يشير إلى عدد معبّر عنه بدلالة الفاصلة العشرية والتي تفصل المنازل الصحيحة عن المنازل العشرية.

ففي الجزء الصحيح؛ تكون قيمة كل منزلة هي عشرة أمثال القيمة المجاورة لها على يمينها (أي مضروبة في 10).

وفي الجزء العشري؛ تكون قيمة كل منزلة هي عُشر القيمة المجاورة لها على يسارها (أي مضروبة في $\frac{1}{10}$).

فمثلاً:

في العدد 6452.348 تكون قيمة كل رقم من أرقامه كالآتي:

$$6\;4\;5\;2\;.\;3\;4\;8$$

$6 \rightarrow 6000$

$4 \rightarrow 400$

$5 \rightarrow 50$

$2 \rightarrow 2$

$3 \rightarrow \frac{3}{10}$

$4 \rightarrow \frac{4}{100}$

$8 \rightarrow \frac{8}{1000}$

(1.2.9) التحويل بين الكسور العشرية والكسور العادية:

تحويل الكسور العادية إلى كسور عشرية:

لتحويل الكسر العادي إلى كسر عشري، فإننا نقسم بسط الكسر على مقامه، كما في الأمثلة الآتية:

مثال(1) :

حوّل الكسور العادية الآتية إلى كسور عشرية:

أ) $\frac{3}{2}$

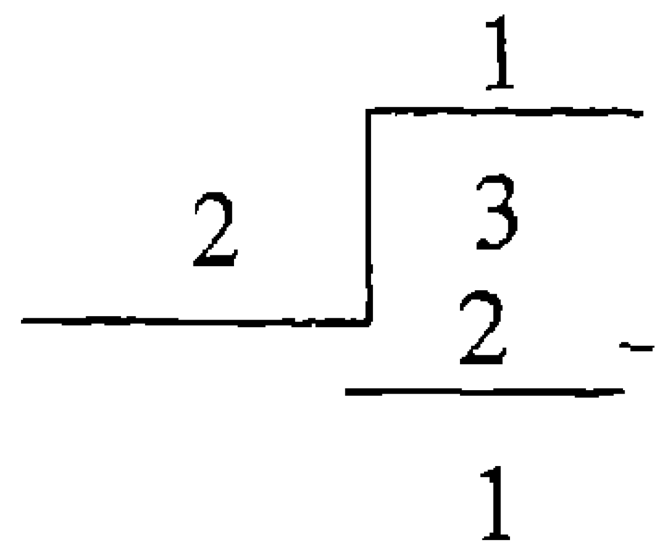
ب) $-\frac{3}{4}$

ج) $\frac{22}{3}$

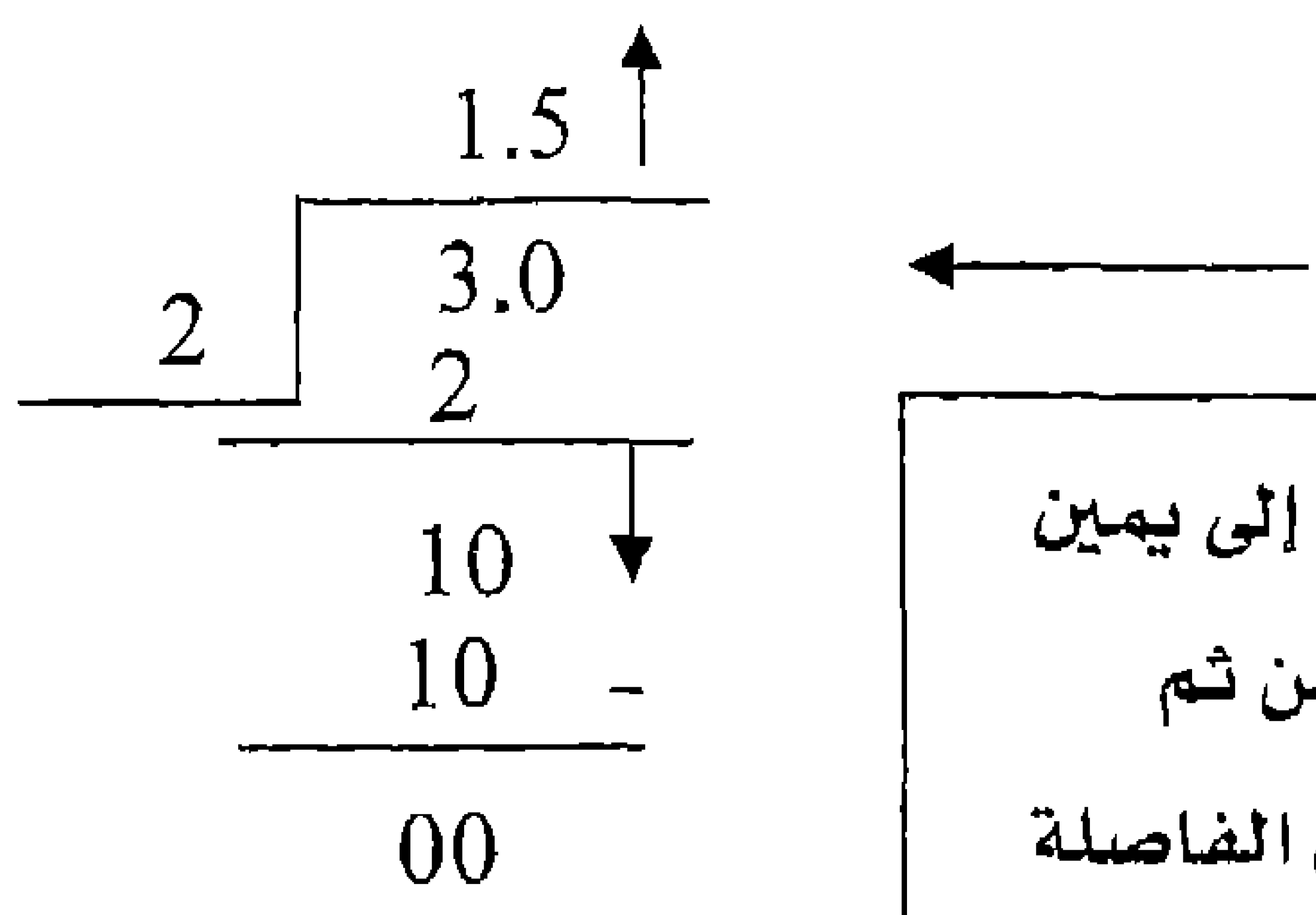
الحل:

أ) لتحويل الكسر العادي $\frac{3}{2}$ إلى كسر عشري نقوم بعملية القسمة وفق الخطوات الآتية:

(1)



(2)



إضافة فاصلة عشرية إلى يمين العدد الصحيح 3 ومن ثم إضافة صفر إلى يمين الفاصلة العشرية

وحيث أن الباقي في الخطوة (2) هو صفر فإن عملية القسمة انتهت بذلك، ويكون ناتج القسمة هو 1.5 والباقي صفر.

وعليه فإن $\frac{3}{2} = 1.5$

ويسمى الكسر العشري 1.5 **كسراً عشرياً منتهياً** (لأن عملية القسمة كانت تامة وانتهت بعد تحديد منزلة واحدة إلى يسار الفاصلة العشرية) .

ب) لتحويل الكسر العادي $\frac{3}{4}$ إلى كسر عشري نقوم بعملية القسمة كالآتي :

$$\begin{array}{r|l} & 0.75 \\ \hline 4 & 3 \\ & 0\ - \\ \hline & 30 \\ & 28\ - \\ \hline & 20 \\ & 20\ - \\ \hline & 00 \end{array}$$

إذن $\frac{3}{4} = 0.75$ ⟵ كسر عشري منتهي .

ج) لتحويل الكسر العادي $\frac{22}{3}$ إلى كسر عشري نقوم بعملية القسمة كالآتي :

$$\begin{array}{r|l} & 7.3 \\ \hline 3 & 22 \\ & 21\ - \\ \hline & 10 \\ & 9\ - \\ \hline & 1 \end{array}$$

الباقي ⟵ 1

فالعدد 7.3 هو ناتج القسمة ، إذا ما اكتفينا بهذه الخطوات.

وإذا تابعنا عملية القسمة نجد أنه من المستحيل في هذا المثال أن يكون باقي القسمة صفر، فنقول إن القسمة التامة غير ممكنة.

ومن هنا، توجد بعض الكسور العادية التي لا تنتهي بها عملية قسمة البسط على المقام ويعود الرقم نفسه ليتكرر دائماً وبدون نهاية، وتسمى هذه الكسور العشرية الناتجة في مثل هذه الحالة **كسوراً عشرية غير منتهية ودورية.**

ففي الكسر $\frac{22}{3} = ...7.3333$ نجد أن الرقم الذي يتكرر دائماً هو الرقم 3

فنكتب الكسر على الشكل $7.\overline{3}$ ويقرأ سبعة وثلاثة من عشرة دوري.

تدريب:

حوّل الكسور العادية الآتية إلى كسور عشرية، ثم حدد أيها منتهي وأيها دوري

$$\frac{1}{3} ، \frac{2}{25} ، \frac{1}{2} ، \frac{1}{9}$$

خلاصة :

تتحول الكسور العادية إلى كسور عشرية إما: منتهية أو غير منتهية دورية، وبهذا فإن الكسور العشرية المنتهية أو الدورية هي أعداد نسبية لأن الأصل فيها هي الكسور العادية $\frac{\text{بسط}}{\text{مقام}}$.

(2.2.9) تحويل الكسور العشرية إلى كسور عادية:

أ) لتحويل الكسور العشرية المنتهية إلى كسور عادية: نكتب العدد المعطى بشكل كسر عادي مقامه 10 أو 100 أو 1000 ، ... ثم نختزل (نختصر) الكسر العادي إلى أبسط صورة ما أمكن .

مثال :

حوّل الكسور العشرية الآتية إلى كسور عادية:

أ) -2.4 ب) 3.225

الحل :

أ) $-2.4 = -2\frac{4}{10} = -2\frac{2}{5} = -\frac{2+2\times5}{5} = -\frac{2+10}{5} = -\frac{12}{5}$

ب) $3.225 = 3\frac{225}{1000}$

$= 3\frac{25 \div 225}{25 \div 100}$

$= 3\frac{9}{40}$

$= \frac{9+3\times40}{40} = \frac{9+120}{40} = \frac{129}{40}$

ب) لتحويل الكسور العشرية غير المنتهية الدورية إلى كسور عادية ، نقوم بالخطوات الآتية:

1) نفرض أن الكسر العشري المراد تحويله يساوي س لنحصل على معادلة .

2) نضرب طرفي المعادلة في 10، 100، 1000 (قوى العدد 10) حتى نحصل على معادلتين يكون فيهما الجزء العشري نفسه.

3) نطرح المعادلتين من بعضهما للتخلص من الجزء العشري الدوري، ونحصل على معادلة من الدرجة الأولى في س دون كسر، ومنها نجد قيمة س التي تمثل الكسر العشري الدوري بصورة كسر عادي .

مثال:

حوّل الكسور العشرية التالية إلى كسور عادية :

أ) $0.\overline{5}$ ب) $\overline{0.53}$

الحل:

أ) لتحويل الكسر العشري الدوري $\overline{0.5}$ إلى كسر عادي :

نفرض أن س = $\overline{0.5}$

أي أن س = 0.555 - - - - - - - - (1)

وبما أن الرقم الدوري 5 يقع في منزلة الأجزاء من عشرة فإننا

نضرب طرفي المعادلة في 10 فتصبح :

10 س = ... 5 , 555 - - - - - - - - - (2)

والآن نطرح المعادلة (1) من (2) أي :

$10\text{س} = 5{,}\dot{5}55$

$-\quad \text{س} = 0{,}\dot{5}55$

$9\text{س} = 5{,}000$ - - - - - - - - (3)

ويحل المعادلة (3)

$\frac{9\text{س}}{9} = \frac{5}{9}$

$\text{س} = \frac{5}{9}$ ⟸ الكسر العادي المطلوب

ب) لتحويل الكسر العشري الدوري $0{,}\overline{53}$ إلى كسر عادي :

نفرض أن　$\text{س} = 0{,}\overline{53}$

أي أن　$\text{س} = 0{,}535353...$ - - - - - - - - (1)

وبما أن الرقمين الدوريين 5، 3 يقعان في منزلتي الأجزاء من عشرة، والأجزاء من مئة على الترتيب.

فإننا نضرب طرفي المعادلة (1) في 100 فتصبح:

$100\text{س} = 53{,}535353...$ - - - - - - - - - - - - - - - (2)

ثم نطرح المعادلة (1) من (2) أي :

$100\text{س} = 53{,}535353...$

$$- \quad س = 00{,}535353...$$

$$99 س = 53{,}00000 \quad ------------- \quad (3)$$

وبحل المعادلة (3)

$$\frac{99 س}{99} = \frac{53{,}00}{99}$$

$$س = \frac{53}{99}$$ ⇐ الكسر العادي المطلوب

تدريب:

حوّل الكسور العشرية الآتية إلى كسور عادية:

أ) - 0.1 ب) - 13.17 ج) $0{,}24$

(3.2.9) الأعداد العشرية والكسور العشرية:

تعلم أن 517 عدد عشري مكوّن من ثلاثة منازل عشرية هي الآحاد والعشرات والمئات، وتعلم أن 517 = (7×10^صفر) + (1×10^1) + (5×10^2)

$$= 7 + 10 + 500$$

ولكتابة الكسور العادية وفق النظام العددي العشري نعرض التوضيح الآتي:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} = 0.5$$

$$\frac{1}{5} = \frac{2}{10} = 0.2$$

$$\frac{1}{3} = 0{,}333333... = 0{,}\overline{3}$$

$$1.75 = 1\frac{75}{100} = 1\frac{25\times 3}{25\times 4} = 1\frac{3}{4}$$

وهكذا، فإن كلٌ من الكسر العادي الفعلي والعدد الصحيح والعدد الكسري أمكن تحويله إلى كسر عُشري أو عدد عشري.

كذلك، فإن تحويل الكسر أو العدد العشري إلى كسر عادي يستلزم الخطوات الآتية وفقاً للمنازل العُشرية والعشرية (حيث يلزم):

$$\frac{1}{10} = \frac{1}{10}\times 1 = 10^{-1}\times 1 = 0.1$$

$$\frac{2}{10}\times\frac{5}{100} = \frac{1}{10}\times 2 + \frac{1\times 5}{10^{2}} = (10^{-1}\times 2)+(10^{-2}\times 5) = 0.25$$

$$\frac{1}{4} = \frac{25}{100} = \frac{20}{100}+\frac{5}{100} = \frac{10\times 2}{10\times 10}+\frac{5}{100} =$$

$$(10^{\text{صفر}}\times 1)+(10^{-1}\times 1)+(10^{-2}\times 2)+(10^{-3}\times 5) = 1.125$$

$$1\times 1+\frac{1}{10}\times 1+\left(\frac{1}{10^{2}}\times 2\right)+\left(\frac{1}{10^{3}}\times 5\right) =$$

$$1\frac{1}{8} = 1\frac{125}{1000} = 1+\frac{1}{10}+\frac{2}{100}+\frac{5}{1000} =$$

وعليه ، تمتد القيم المنزلية إلى أجزاء العشرة وأجزاء المئة وأجزاء الألف ، وهكذا ...

(4.2.9) الكسور العشرية المتشابهة والمتكافئة ومقارنتها:

يسهل التعرف إلى الكسور العشرية المتشابهة، إذ أن 0.5 ، 0.2 مثلاً هما كسران متشابهان، لأن كلاً منهما مكوّن من منزلة عشرية واحدة.

ومن السهل أيضاً التعرف إلى الكسور العشرية المتكافئة ، فمثلاً:

$0.15 \cong 0.150 \quad 0.1500$ لأن جميعها يكافئ الكسر العادي $\frac{3}{20}$

ومن هنا، تسهل مقارنة الكسور العشرية ، سواء اشتملت على منزلة عشرية واحدة أو أكثر، فمثلاً:

$$2.0 > \quad 1.21 > \quad 0.21 > \quad 0.2$$

لكن $0.2 \quad < 0.05 < \quad 0.015$ (لماذا ؟)

(3.9) العمليات الحسابية على الكسور العشرية:

(1.3.9) جمع الكسور العشرية وطرحها:

لجمع الكسور العشرية أو طرحها، نرتب هذه الكسور رأسياً شرط أن تقع الفواصل تحت الفواصل والأعداد الصحيحة تحت الأعداد الصحيحة بحسب منازلها، والأجزاء العشرية تحت الأجزاء العشرية بحسب منازلها أيضاً، ثم نجري عملية الجمع أو الطرح كما نجريها في الأعداد الصحيحة تماماً، أي أن إجراءات جمع الكسور العشرية لا تختلف عن إجراءات الجمع على الأعداد الصحيحة، على أن يتم الاحتفاظ بموقع الفاصلة (النقطة) العشرية.

مثال:

جد ناتج ما يلي :

أ) $4.25 + 2.41$

ب) $7.45 - 3.54$

ج) $12.65 - (7.47)$

الحل:

أ) $^{-}4.25 + 2.41 = {}^{-}1.84$

$$\begin{array}{r} 4.25 \\ 2.41 - \\ \hline 1.84 \end{array}$$

ب) $^{-}7.45 - 3.54 = {}^{-}7.45 + (-3.54)$

$= -10.99$

$$\begin{array}{r} 7.45 \\ 3.54 + \\ \hline 10.99 \end{array}$$

ج) $12.65 - (-7.47) = 12.65 + 7.47$

$= 2.12$

$$\begin{array}{r} 12.65 \\ 07.47 + \\ \hline 20.12 \end{array}$$

(2.3.9) ضرب الكسور العشرية:

أ) **لإيجاد ناتج ضرب كسرين عشريين:** نهمل الفاصلة(النقطة) العشرية، ونضرب العددين الصحيحين الناتجين، ثم نضع فاصلة(النقطة) في ناتج الضرب من جهة اليمين، شرط أن يكون عدد المنازل العشرية مساوياً مجموع عدد المنازل العشرية في العددين المضروبين.

أي أن ضرب الكسور العشرية يتبع النهج نفسه في ضرب الأعداد الصحيحة على أن يزداد عدد المنازل العُشرية بحيث يكون عدد هذه المنازل هو مجموع عدد المنازل العُشرية في الكسرين العشريين المضروبين ببعضهما.

مثال:

جد ناتج ضرب ما يلي:

أ) 1.24×6.3

ب) 1.3×0.8

الحل:

أ) $1.24 \times 6.3 = 7.812$

$$\begin{array}{r} 124 \\ \times \quad 63 \\ \hline 7812 \end{array}$$

ب) $1.3 \times 0.8 = 1.04$

$$\begin{array}{r} 13 \\ \times \quad 8 \\ \hline 104 \end{array}$$

ب) لضرب كسر عشري بالعدد 10 أو مضاعفاته: ننقل الفاصلة العشرية إلى اليمين بعدد أصفار المضروب فيه.

مثال :

جد ناتج ضرب ما يلي :

أ) $10 \times 4.332-$

ب) 1000×6.724

ج) $100 - \times 73.275 -$

الحل:

أ) $43.32- = 10 \times 4.332-$

ب) $6724.0 = 1000 \times 6.724$

ج) $7327.5+ = 100 - \times 73.275-$

(3.3.9) قسمة الكسور العشرية:

أ) لإيجاد ناتج قسمة كسر عشري على 10 أو مضاعفاتها: ننقل الفاصلة (النقطة) العشرية إلى اليسار بعدد أصفار المقسوم عليه.

مثال:

جد ناتج قسمة ما يلي :

أ) $10 - \div 257.3 -$

ب) $1000 \div 39.33 -$

ج) $10000 \div 0.75$

الحل:

أ) $257.3 \div 10 = 25.73$

ب) $39.33 \div 1000 = 0.03933$

ج) $0.75 \div 10000 = 0.000075$

ب) قسمة عدد عشري على عدد صحيح:

لإيجاد ناتج قسمة عدد عشري على عدد صحيح، نقسم العدد الصحيح أولاً، ثم ننقل الفاصلة إلى ناتج القسمة عند الوصول إليها، ثم ننزل أول رقم عشري ونتابع القسمة كما في الأعداد الصحيحة.

مثال:

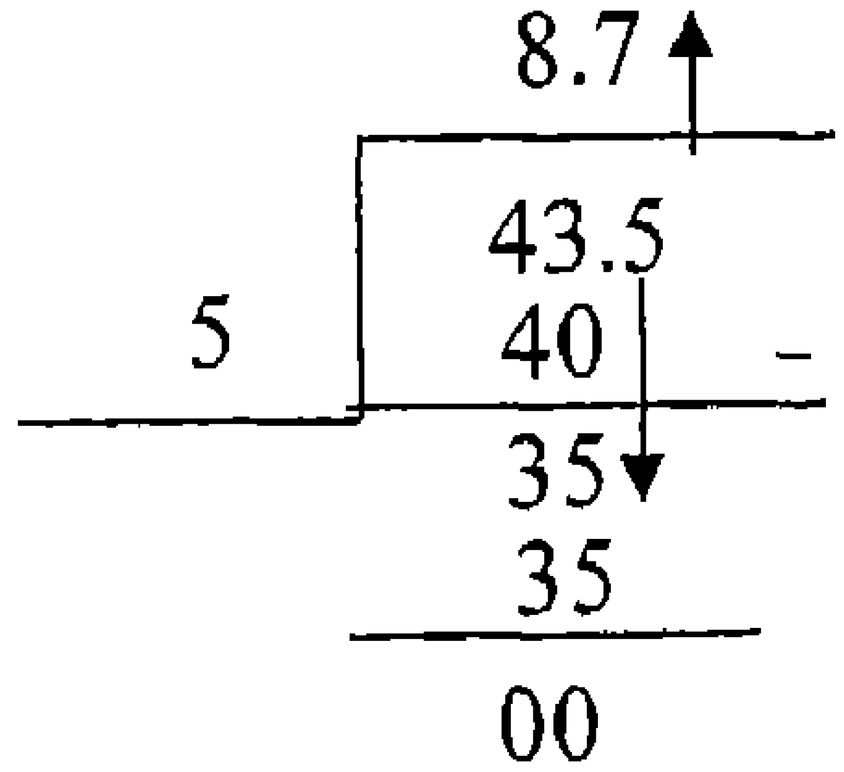
جد ناتج قسمة ما يلي:

أ) $43.5 \div 5$

ب) $78.12 \div 63$

الحل:

أ) $43.5 \div 5 = 8.7$



ب) $78.12 \div 63 = 1.24$

$$
\begin{array}{r|l}
 & \;\;1.24 \\ \hline
63 & \;\;78.12 \\
 & -\;63 \\ \hline
 & \;\;151 \\
 & -\;126 \\ \hline
 & \;\;\;252 \\
 & -\;252 \\ \hline
 & \;\;\;000
\end{array}
$$

ج) قسمة كسر عشري على كسر عشري آخر :

لإيجاد ناتج قسمة كسر عشري على كسر آخر نحوّل المقسوم عليه إلى عدد صحيح من خلال ضرب المقسوم والمقسوم عليه بأحدى قوى ال 10 (تحريك الفاصلة إلى اليمين بنفس القدر في المقسوم والمقسوم عليه) ومن ثم نجري عملية القسمة على عدد صحيح كما في البند السابق.

مثال:

جد ناتج قسمة ما يلي:

أ) $398.52 \div 3.24$

ب) $23.14 \div 2.6$

ج) $310.68 \div 2.589$

الحل:

أ) $398.52 \div 3.24 = \frac{398.52 \times 100}{3.24 \times 100}$

$= \frac{39852.0}{0.324}$ (قسمة عدد صحيح على عدد صحيح)

$= 123$

```
        123
     ┌──────
 324 │ 39852
       324   -
     ─────
       745
       648
      ─────
       972
       972
      ─────
       000
```

ب) $23.14 \div 2.6 = \frac{23.14}{2.6}$

$= \frac{231.4}{26.0}$ (قسمة كسر عشري على عدد صحيح)

$= 8.9$

```
        8.9
     ┌──────
  26 │ 231.4
       208   -
     ─────
       234
       234   -
      ─────
       000
```

ج) $310.68 \div 2.589 = \frac{310.68}{2,589}$

$= \frac{310680.0}{2589.0}$ (قسمة عدد صحيح على عدد صحيح)

$= 120$

	120
2589	310680
	- 2589
	5178
	5718
	0000

سؤال: هل تختلف خصائص العمليات الحسابية على الكسور العشرية عنها في الكسور العادية؟ تحقق من إجابتك بأمثلة عددية.

(4.9) الجذر التربيعي للعدد الصحيح الموجب:

(1.4.9) الجذر التربيعي لمربع كامل:

إذا كان س ، ص عددين صحيحين موجبين ، وكان $ص^2 = س$ فإن:

ص هو الجذر التربيعي للعدد س ، ويكتب بالرموز $ص = \sqrt{س}$

فمثلاً:

$\sqrt{81} = 9$

$\sqrt{2500} = 500$

$\sqrt{36} = 6$

أي أن الجذر التربيعي لعدد مفروض هو عدد مربعه يساوي العدد المفروض، وبصيغة أخرى، فإن الجذر التربيعي لعدد ما هو أحد العاملين المتساويين لهذا العدد (إن أمكن تحليله إلى عاملين متساويين)، فمثلاً $\sqrt{81} = 9 = \sqrt{9\times9} = 9$ لأن $9^2 = 81$ ، وهكذا ...

(2.4.9) الجذر التربيعي لمربع غير كامل (الأعداد غير النسبية):

إذا أخذت العدد 2 ستجد أنه ليس مربعاً كاملاً ، أي لا يوجد عدد صحيح موجب مربعه يساوي 2 ، وبالتالي لا يمكن التعبيرعن الجذر التربيعي للعدد 2 على صورة عدد عشري (منتهي أو دوري) وإنما يمكن الحصول على قيمة تقريبية له، وهناك جداول رياضية خاصة يمكن استخدامها لإيجاد القيم التقريبية لجذور الأعداد الموجبة.

ولقد استخدم الحاسوب في إيجاد ذلك ولم يصل إلى جواب نهائي .

فمثلاً :

$$\sqrt{2} = 1.4142000$$

$$\sqrt{3} = 1.73205000$$

$$\sqrt{10} = 3.16227000$$

ويكفي القول أن $\sqrt{2} \approx 1.41$ (حيث ≈ تعني يساوي تقريباً) .

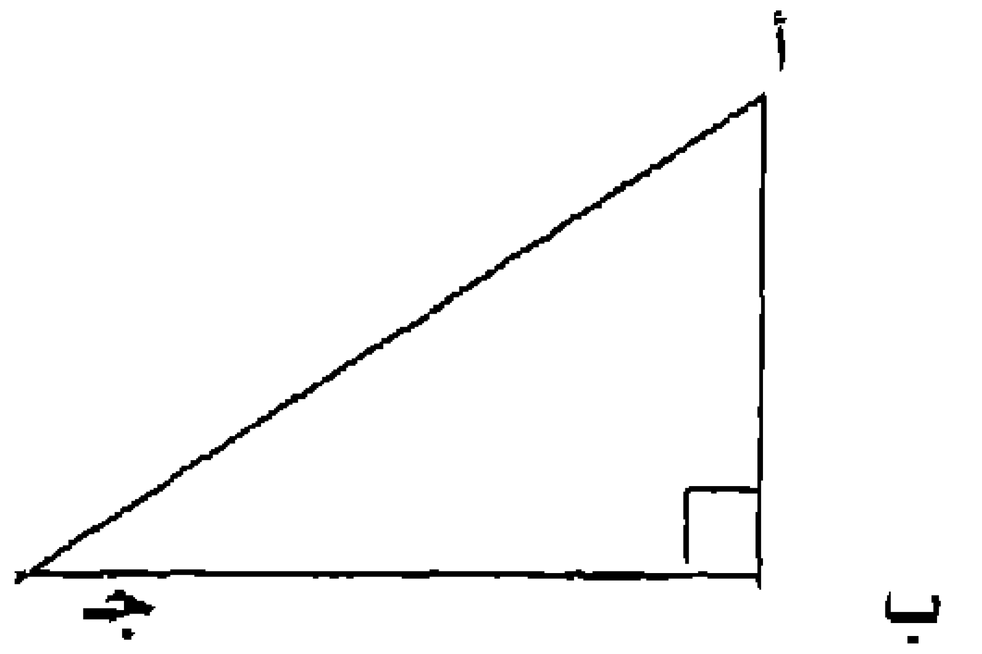
لعلك تلاحظ أن الصور العشرية لـ $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{3}$ ، $\sqrt{10}$ غير دورية وغير منتهية ، وكذلك الكسور العشرية مثل: ... 21. 32322332، ... 5, 211211112 ، ... 0, 013001300001300 ليست منتهية ولا دورية .

مثل هذه الأعداد تسمى أعداداً غير نسبية ، ويرمز لها بالرمز $\overline{ن}$.

وإذا ما حاولنا تمثيل الأعداد النسبية على مستقيم الأعداد، فإننا نوضح ذلك من خلال المثال الآتي:

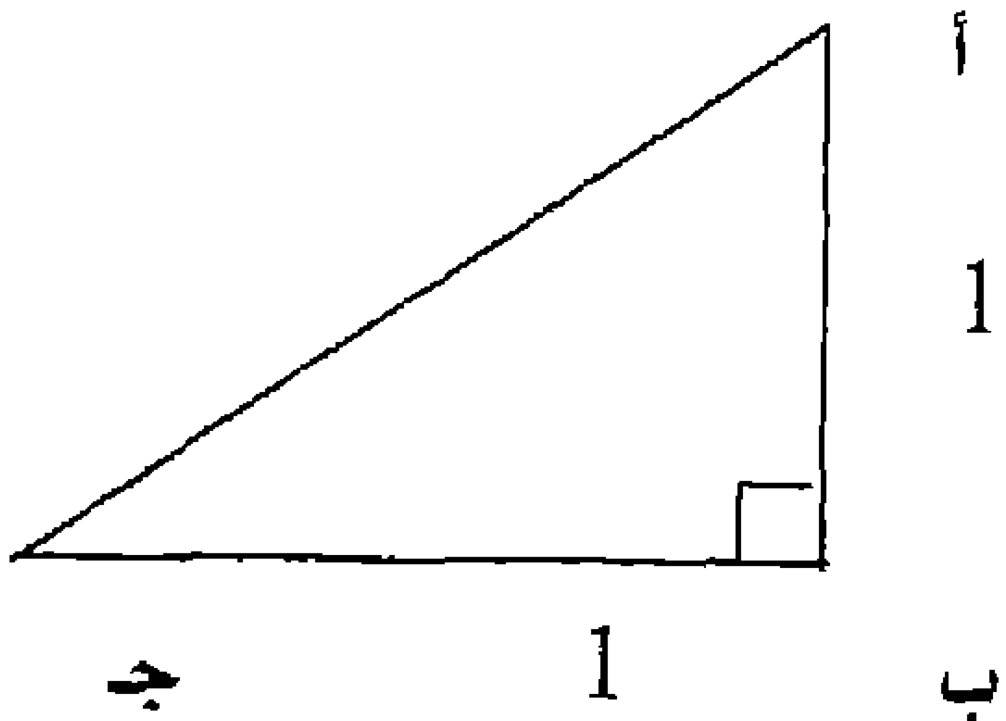
تعلم من دراساتك، أن مربع طول الوتر في المثلث القائم الزاوية يساوي مجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين، أي أن:

$(أ\,جـ)^2 = (أ\,ب)^2 + (ب\,جـ)^2$



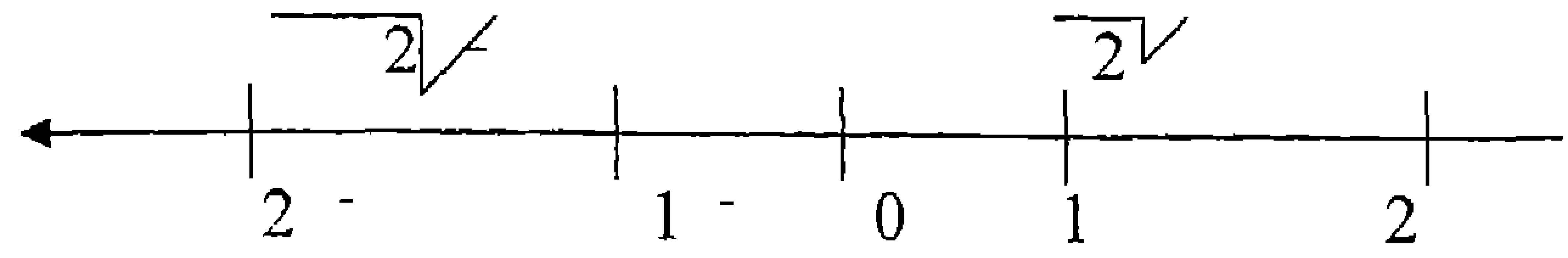
فإذا كان أب = 1 ، ب ج = 1 فإن :

$(أجـ)^2 = 1 + 1 = \sqrt{2 \Leftarrow أجـ} = \pm \quad 2$



وهكذا نفتح الفرجار فتحة تساوي أ جـ ، وتقطع مستقيم الأعداد في موقعين أحدهما يمثل

$\sqrt{2}$ والآخر يمثل - $\sqrt{2}$ كالآتي :



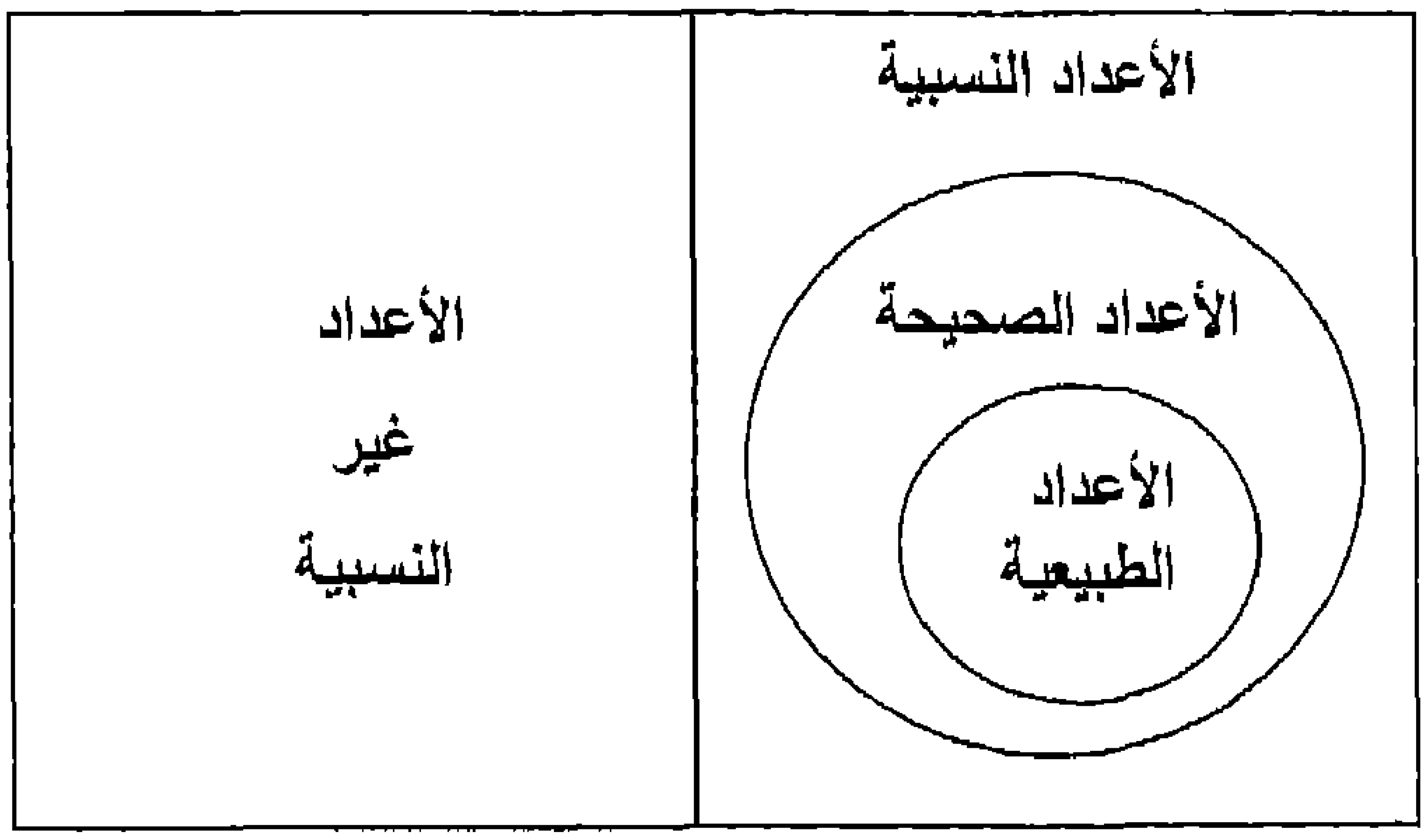
الشكل (1.9): تمثيل احد الأعداد غير النسبية على مستقيم الأعداد

وعليه، يمكن القول أنه يمكن تمثيل أي عدد غير نسبي على مستقيم الأعداد.

(5.9) الأعداد الحقيقية:

تسمى مجموعة الأعداد التي تتكون من اتحاد مجموعة الأعداد النسبية ومجموعة الأعداد غير النسبية: مجموعة الأعداد الحقيقية، ويرمز لها بالرمز ح.

وتمثل مجموعة الأعداد الحقيقية ح بأشكال ڤن كالآتي:



مثال: صنّف الأعداد الحقيقية الآتية إلى أعداد نسبية أو غير نسبية :

أ) $0.\overline{67}$

ب) $\frac{3}{4}$

ج) $0.16666...$

د) -5

هـ) $15.3410020...$

الحل:

أ) العدد $0.\overline{67}$ هو كسر عشري دوري ، ولذا فهو عدد نسبي .

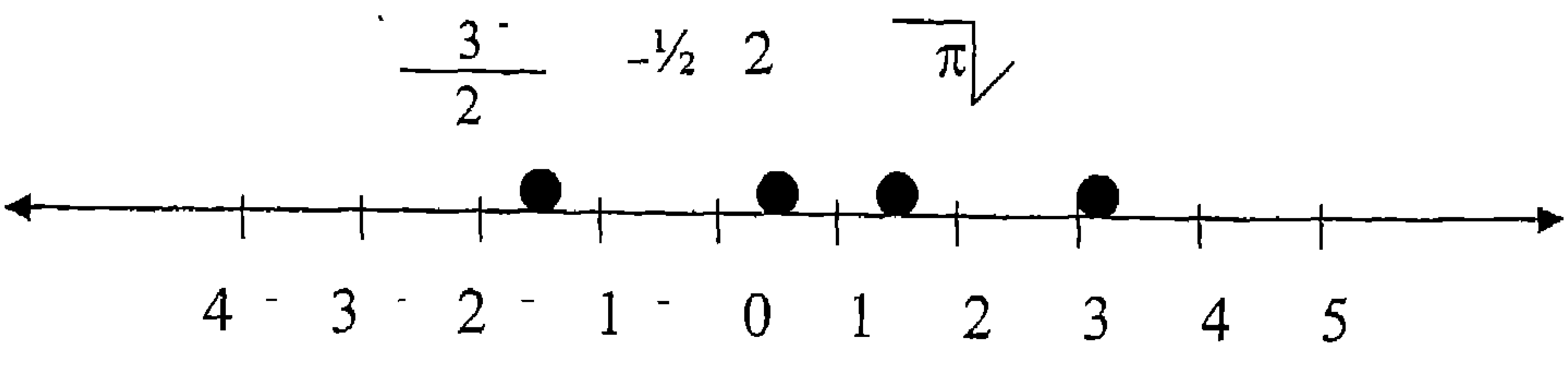
ب) العدد $\frac{3}{4}$ هو كسر عادي ولذا فهو عدد نسبي .

ج) العدد $0.16666... = 0.1\overline{6}$ وهو كسر عشري دوري ولذا فهو عدد نسبي .

د) العدد $-5 = \frac{-5}{1}$ فهو عدد نسبي .

هـ) العدد.. 15.3410020 ليس منتهياً ولا دورياً ولذا فهو عدد غير نسبي.

ومن الممكن جداً تمثيل أي عدد حقيقي (نسبي أو غير نسبي) على مستقيم الأعداد، كما يظهر من التوضيح الآتي:



الشكل (2.9) تمثيل الأعداد الحقيقية على مستقيم الأعداد

وتجدر الإشارة إلى أن الأعداد الصحيحة أعداد حقيقية، وهكذا فإن جميع الأعداد الحقيقية بما فيها الأعداد الصحيحة بالإمكان تمثيلها على مستقيم الأعداد.

(6.9) العمليات على الأعداد الحقيقية:

(1.6.9) العمليات على الأعداد غير النسبية:

تتكون مجموعة الأعداد الحقيقية من إتحاد مجموعة الأعداد النسبية ومجموعة الأعداد غير النسبية، وقد سبق ومر معنا العمليات الحسابية على الأعداد النسبية سواء الكسور العادية منها أو الكسور العشرية، ولذا سنعرض في هذا البند العمليات على الأعداد غير النسبية باعتبارها المجموعة الجزئية من الأعداد الحقيقية التي تتمم مجموعة الأعداد النسبية إلى مجموعة الأعداد الحقيقية.

قاعدة: إذا كان أ، ب عددين صحيحين موجبين، فإن:

$$\sqrt{أ \times ب} = \sqrt{أ} \times \sqrt{ب}$$

فمثلاً: لإيجاد $\sqrt{49 \times 81}$ نلاحظ أن :

$$\sqrt{49 \times 81} = \sqrt{7^2 \times 9^2} = 7 \times 9$$

كذلك ،

$$\sqrt{49} \times \sqrt{81} = 7 \times 9$$

أي أن $\sqrt{49 \times 81} = \sqrt{49} \times \sqrt{81}$

وبالاعتماد على القاعدة السابقة، يمكن جمع وطرح وضرب وقسمة الأعداد غير النسبية (كما في حالة الأعداد النسبية) من خلال تحويل الجذور التربيعية للأعداد الحقيقية إلى جذور متشابهة يمكن جمعها وطرحها وضربها وقسمتها.

مثال (1): جد ناتج ما يلي في أبسط صورة:

أ) $\sqrt{18} - \sqrt{8}$

ب) $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$

الحل :

أ) $\sqrt{18} - \sqrt{8} = \sqrt{9 \times 2} - \sqrt{4 \times 2}$

$= \sqrt{9} \times \sqrt{2} - \sqrt{4} \times \sqrt{2}$

$= 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2}$

$= \sqrt{2}$

ب) $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3 \times 2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3} \times \sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}$

مثال(2): تحقق من أن:

$\sqrt{45} + \dfrac{15}{\sqrt{5}} = 6\sqrt{5}$

الحل : الطرف الأيمن $= \sqrt{45} + \dfrac{15}{\sqrt{5}}$

$$= \sqrt{5\times 9} + \frac{15}{\sqrt{5}}$$

$$= \sqrt{9} \times \sqrt{5} + \frac{15}{\sqrt{5}}$$

$$= 3\sqrt{5} + \frac{15}{\sqrt{5}}$$

(لاحظ انه يمكن التخلص من الجذر التربيعي في مقام الكسر $\frac{15}{\sqrt{5}}$ بضرب الكسر في $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$ الذي يساوي (1) وتسمى هذه العملية إنطاق المقام)

$$= 3\sqrt{5} + \frac{15}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{3\sqrt{5}}{1} + \frac{15\sqrt{5}}{5}$$

$$= \frac{5 \times 3\sqrt{5} + 15\sqrt{5}}{5}$$

$$\frac{15\sqrt{5} + 15\sqrt{5}}{5}$$

$$= \frac{30\sqrt{5}}{5}$$

$= 6\sqrt{5} =$ الطرف الأيسر

أي أن $\sqrt{45} + \frac{15}{\sqrt{5}} = 6\sqrt{5}$

مثال(3) : تحقق من أن:

$$\sqrt{99} - \sqrt{44} = \sqrt{11}$$

الحل:

الطرف الأيمن $= \sqrt{99} - \sqrt{44}$

$= \sqrt{9 \times 11} - \sqrt{4 \times 11}$

$= \sqrt{9} \times \sqrt{11} - \sqrt{4} \times \sqrt{11}$

$= 3\sqrt{11} - 2\sqrt{11}$

$= \sqrt{11} =$ الطرف الأيسر

(2.6.9) الأسس:

إذا كان أ $\in$ ح، وكان ن عدداً صحيحاً موجباً فإن:

أ^{ن} = أ × أ × أ × ... × أ (ن من المرات) وتقرأ أ أس ن

فمثلاً :

$$3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$$

وكذلك، $(-2)^5 = -2 \times -2 \times -2 \times -2 \times -2 = -32$

قوانين الأسس:

إذا كان أ ، ب $\in$ ح ، ن ، م عددين صحيحين موجبين ، فإن :

1) $أ^{ن} \times أ^{م} = أ^{ن+م}$

مثال:

$3^{2} \times 3^{5} = 3^{2+5} = 3^{7}$

2) $(أ^{ن})^{م} = أ^{ن \times م}$

مثال:

$(5^{2})^{3} = 5^{2\times3} = 5^{6}$

3) $(أ \times ب)^{ن} = أ^{ن} \times ب^{ن}$

مثال:

$(2 \times 3)^{4} = 2^{4} \times 3^{4}$

4) إذا كان $أ^{س} = أ^{ن}$ فإن س = ن

مثال:

إذا كانت $4^{س} = 64$ فجد قيمة س ؟

الحل: $4^{س} = 4^{3}$

إذن س = 3

5) $\frac{أ^{م}}{أ^{ن}} = أ^{م-ن}$ (أ ≠ صفر)

مثال:

$$3^{7} = \frac{3^{7}}{3^{4}} = 3^{7-4} = 3^{3} = 27$$

6) $أ^{-ن} = \frac{1}{أ^{ن}}$ (أ ≠ صفر)

مثال:

$$3^{-2} = \frac{1}{3^{2}} = \frac{1}{9}$$

7) $أ^{صفر} = 1$ (أ ≠ صفر)

مثال:

$$\frac{2^{3}}{2^{3}} = 2^{3-3} = 2^{صفر} = 1$$

وذلك لأن: $\frac{2^{3}}{2^{3}} = \frac{2\times2\times2}{2\times2\times2} = 1$

8) $أ^{\frac{1}{ن}} = \sqrt[ن]{أ}$ ، (ن > 1)

مثال: $(1000)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{1000} = 10$

$$(16)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2\times2\times2\times2} = 2$$

ملاحظة هامة:

إذا كان ن عدداً فردياً فإنه يمكن إيجاد $\sqrt[ن]{أ}$ لأي عدد حقيقي أ .

فمثلاً $(-27)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{-3 \times -3 \times -3} = -3$

وكذلك $(-32)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{-32} = \sqrt[5]{-2 \times -2 \times -2 \times -2 \times -2} = -2$

<u>تدريب :</u> هل بإمكانك إيجاد قيمة؟ حاول إيجاد ذلك بطريقتين .

$$أ^{\frac{م}{ن}}$$

(7.9) خصائص العمليات على الأعداد الحقيقية:

يتناول هذا البند في بدايته، خصائص العمليات على $\overline{ن}$ باعتبارها مجموعة جزئية من ح ، ومن ثم سيتم تناول خصائص العمليات على ح.

(1.7.9) خصائص العمليات على الأعداد غير النسبية:

يلخص الجدول الآتي خصائص العمليات على الأعداد غير النسبية كالآتي:

الخاصية	(ن̄ ، +)	(ن̄ ، −)	(ن̄ ، ×)	(ن̄ ، ÷)
الانغلاق	×	×	×	×
الإبدالية	✓	×	✓	×
التجميعية	✓	×	✓	×
التوزيعية	×	×	تتوزع عملية الضرب على كل من الجمع والطرح	×
المحايد	×	×	×	×
النظير	×	×	×	×

فمثلاً: $\sqrt{2}$ عدد غير نسبي، $-\sqrt{2}$ عدد غير نسبي، لكن ناتج جمعهما.

$\sqrt{2} + -\sqrt{2}$ = صفر ∉ ن̄ ، إذن ن̄ لا تحقق خاصية الانغلاق .

كما أنه لا تتحقق خاصية المحايد في (ن̄ ، ×) مثلاً ، فعلى الرغم من أن

$\sqrt{2} \times 1 = 1 \times \sqrt{2} = \sqrt{2}$ إلا أن 1 ∉ ن̄ .

كذلك، الخاصية الإبدالية والتجميعية فتتحققان على (ن، +)، (ن ، ×)، فمثلاً :

$\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$ ، وكذلك :

كذلك $\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{3}\times\sqrt{2}=\sqrt{6}$

تدريب:

ادرس خصائص العمليات الحسابية على ن̄، من خلال دراستك للجدول السابق بالتفصيل، مع إعطاء أمثلة عددية.

(2.7.9) خصائص العمليات على الأعداد الحقيقية:

1) خاصية الانغلاق :

إذا كان أ ، ب ∈ ح ، فإن :

أ + ب ∈ ح ، أ − ب ∈ ح

أ × ب ∈ ح ، أ ÷ ب ∈ ح (ب ≠ صفر)

فمجموعه الأعداد الحقيقية مغلقة تحت العمليات الحسابية الأربعة (باستثناء القسمة على الصفر).

فمثلاً :

$$\sqrt{18}+\sqrt{2}=\sqrt{9\times 2}+\sqrt{2}$$

$$=3\sqrt{2}+\sqrt{2}$$

$$=4\sqrt{2}$$

$= \sqrt{16 \times 2}$

$= \sqrt{32} \in$ ح

كذلك: $\sqrt{28} \times \sqrt{7} = \sqrt{4 \times 7} \times \sqrt{7}$

$= 4 \times \sqrt{7 \times 7}$

$= \sqrt{4} \times \sqrt{49}$

$= 2 \times 7$

$= 14 \in$ ح

كذلك فإن : $16 \div 64 = 4 \div 8 = \frac{4}{8}$

$= \frac{1}{2} \in$ ح

2) الخاصية الإبدالية:

إذا كان أ ، ب $\in$ ح ، فإن :

أ + ب = ب + أ

وكذلك أ × ب = ب × أ

مثلاً: $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$

و $\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$

أي أن $\sqrt{9} + \sqrt{16} = \sqrt{16} + \sqrt{9}$

وكذلك، $\sqrt{3} \times 5\sqrt{3} = 5\sqrt{3 \times 3} = 5 \times 3 = 15$

و $5\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 5\sqrt{3 \times 3} = 5 \times 3 = 15$

أي أن $\sqrt{3} \times 5\sqrt{3} = 5\sqrt{3} \times \sqrt{3}$

3) الخاصية التجميعية:

إذا كان أ ، ب ، ج $\in$ ح ، فإن:

(أ + ب) + ج = أ + (ب + ج)

وكذلك، (أ × ب) × ج = أ × (ب × ج)

مثال:

تحقق بأمثلة عددية من صحة الخاصية التجميعية بالنسبة لعملية الجمع وعملية الضرب على الأعداد الحقيقية.

الحل:

❖ الخاصية التجميعية بالنسبة لعملية الجمع على ح :

$$(\sqrt{3} + \sqrt{12}) + \sqrt{27} \overset{?}{=} \sqrt{3} + (\sqrt{12} + \sqrt{27})$$

الطرف الأيمن = $(\sqrt{3} + \sqrt{12}) + \sqrt{27}$

$= (\sqrt{3} + 2\sqrt{3}) + 3\sqrt{3}$

$= 3\sqrt{3} + 3\sqrt{3}$

$= 6\sqrt{3}$

الطرف الأيسر $= \sqrt{3} + (\sqrt{12} + \sqrt{27})$

$= \sqrt{3} + (2\sqrt{3} + 3\sqrt{3})$

$= \sqrt{3} + 5\sqrt{3}$

$= 6\sqrt{3}$

إذن: الطرفان متساويان

❖ الخاصية التجميعية بالنسبة لعملية الضرب على ح:

$$(2\sqrt{2} \times \sqrt{2}) \times \sqrt{2} \overset{?}{=} \sqrt{2} \times (2\sqrt{2} \times \sqrt{2})$$

الطرف الأيمن $= (2\sqrt{2} \times \sqrt{2}) \times \sqrt{2}$

$= (2\sqrt{2} \times \sqrt{2}) \times \sqrt{2}$

$= 2\sqrt{2 \times 2} \times \sqrt{2}$

$= 2 \times 2 \times \sqrt{2}$

$= 4\sqrt{2}$

الطرف الأيسر $= \sqrt{2} \times (2\sqrt{2} \times \sqrt{2})$

$= \sqrt{2} \times (2\sqrt{2 \times 2})$

$$= 2 \times 2 \times \sqrt{2}$$

$$= 4\sqrt{2}$$

إذن: الطرفان متساويان

4) الخاصية التوزيعية :

إذا كان أ ، ب ، ج ∋ ح ، فإن :

أ × (ب ± ج) = (أ × ب) ± (أ × ج)

وتسمى هذه الخاصية بخاصية توزيع الضرب على كل من الجمع والطرح .

مثال:

جد قيمة $2\sqrt{3}\left(5\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ باستخدام الخاصية التوزيعية للضرب على الجمع ، واكتبها في أبسط صورة ثم تحقق من صحة حلك .

الحل : $2\sqrt{3}\left(5\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \left(2\sqrt{3} \times 5\sqrt{3}\right) + \left[2\sqrt{3} \times \frac{1}{\sqrt{6}}\right]$

$$= 2 \times 5 \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} + \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$$

$$= 10 \times \sqrt{9} + \frac{2\sqrt{3}}{6} \times \frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$= 3\times 10 + \frac{2\sqrt{3\times 6}}{\sqrt{6}}$$

$$= \frac{30}{1} + \frac{\sqrt{18}}{3}$$

$$= \frac{90 + \sqrt{18}}{3}$$

$$= \frac{90 + \sqrt{9\times 2}}{3}$$

$$= \frac{90 + 3\sqrt{2}}{3}$$

$$= \frac{3\,(30 + \sqrt{2})}{3}$$

$$= 30 + \sqrt{2}$$

التحقق من صحة الحل:

يمكن إيجاد الناتج دون استخدام الخاصية التوزيعية كالآتي:

$$2\sqrt{3}\left(5\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{6}}\right) = 2\sqrt{3}\left(5\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{6}}\times\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}\right)$$

$$= 2\sqrt{3}\left(5\sqrt{3} + \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$$

$$= 2\sqrt{3}\,\frac{(5\times\sqrt{3}\times 6 + \sqrt{6})}{6}$$

$$= 2\sqrt{3}\,\frac{(30\sqrt{3} + \sqrt{6})}{6}$$

$$= 2\sqrt{3}\times\frac{(30\sqrt{3} + \sqrt{6})}{6}$$

$$= \frac{\sqrt{3}\times 30\sqrt{3} + \sqrt{3}\times\sqrt{6}}{3}$$

$$= \frac{30\sqrt{9} + \sqrt{18}}{3}$$

$$= \frac{30\times 3 + 3\sqrt{2}}{3}$$

$$= \frac{3(30 + \sqrt{2})}{3}$$

$$= 30 + \sqrt{2}$$

وبذلك فإن:

$$2\sqrt{3}\left(5\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{6}}\right) = (2\sqrt{3}\times 5\sqrt{3}) + \left(2\sqrt{3}\times\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

5) خاصية العنصر المحايد:

إذا كان أ $\in$ ح ، فإن :

أ + 0 = 0 + أ = أ (الصفر هو المحايد الجمعي في ح)

أ × 1 = 1 × أ = أ (الواحد هو المحايد الضربي في ح)

فمثلاً : $\sqrt{3} + 0 = 0 + \sqrt{3} = \sqrt{3}$ حيث صفر $\in$ ح

وكذلك ، $\sqrt{4} \times 1 = 1 \times \sqrt{4} = \sqrt{4} = 2$ حيث $1 \in$ ح

6) خاصية النظير:

إذا كان أ $\in$ ح ، فإنه :

- يوجد للأعداد الحقيقية نظير جمعي هو معكوس العدد (أي عكسه في الإشارة)، بحيث أن: أ + (⁻ أ) = صفر

- ويوجد للأعداد الحقيقية نظير ضربي هو مقلوب العدد (ما عدا الصفر)، بحيث أن:

أ × $\frac{1}{\text{أ}}$ = 1 (بشرط أ $\neq$ صفر)

فمثلاً : $\sqrt{3} + (-\sqrt{3})$ = صفر

وكذلك ، $\sqrt{4} \times \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{4}} = \frac{2}{2} = 1$

❖ أما بالنسبة لعمليتي الطرح والقسمة فلا تحقق أياً منهما خصائص الإبدال والتجميع والتوزيع، وليس في مجموعة الأعداد الحقيقية محايد في عملية الطرح أو القسمة ، وليس للأعداد الحقيقية نظير في عملية الطرح أو عملية القسمة.

تدريب:

تحقق مما سبق بأمثلة عددية .

❖ ويمكن تلخيص خصائص العمليات الحسابية على ح كما في الجدول الآتي :

الخاصية	(ح ، +)	(ح ، −)	(ح ، ×)	(ح ، ÷)
الانغلاق	✓	×	✓	×
الإبدالية	✓	×	✓	×
التجميعية	✓	×	✓	×
التوزيعية	×	×	تتوزع عملية الضرب على كل من الجمع والطرح	×
المحايد	الصفر	×	1	×
النظير	✓	×	×	×

(8.9) تمارين ونشاطات

(1) ضع إشارة (×) على رمز الإجابة الصحيحة في كل مما يلي :

1) الكسر العادي $\frac{3}{4}$ =

أ) 0. 75 ب) 7. 5 ج) 75. 0 د) 0. 075

2) الكسر العشري 0. 125 =

أ) $\frac{7}{8}$ ب) $\frac{5}{8}$ ج) $\frac{3}{8}$ د) $\frac{1}{8}$

3) إذا كان $123 \times 3 = 369$ فإن 0.123×0.03 =

أ) 0. 369 ب) 0. 0369 ج) 0. 00369 د) 36900. 0

4) إذا كان $125 \div 5 = 25$ فإن $12.5 \div 0.05$ =

أ) 250 ب) 2500 ج) 0. 25 د) 0. 025

5) 0.0135×1000 =

أ) 0. 135 ب) 1. 35 ج) 13. 5 د) 135. 0

6) $2.865 \div 100$ =

أ) 286. 5 ب) 28. 65 ج) 0. 2865 د) 0. 02865

7) $0.25 + {}^{-}0.75 =$

أ) 1.00 ب) ${}^{-}0.5$ ج) 0.5 د) ${}^{-}1.00$

8) $20^{2} \div 2^{4} =$

أ) 25 ب) 100 ج) $\frac{25}{4}$ د) $\frac{25}{2}$

9) $8^{-\frac{1}{3}} =$

أ) 2 ب) ${}^{-}2$ ج) $\frac{1}{2}$ د) ${}^{-}\frac{1}{2}$

10) $(27)^{\frac{2}{3}} =$

أ) 3 ب) 6 ج) 9 د) $\sqrt{27}$

11) $\sqrt{99} - \sqrt{44} =$

أ) $\sqrt{55}$ ب) $\sqrt{143}$ ج) $\sqrt{11}$ د) لا يمكن إيجاده

12) $\sqrt{20} - \frac{1}{\sqrt{5}} =$

أ) $\frac{\sqrt{19}}{\sqrt{5}}$ ب) $\frac{10\sqrt{5}}{5}$ ج) $\frac{9\sqrt{5}}{5}$ د) $\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}}$

13) ($9 = 3^2$) هو تعبير يدل على أن العدد 9 هو :

أ) الأساس ب) الأس ج) قوة العدد 2 د) قوة العدد 3

14) العدد (صفر) لا ينتمي لإحدى المجموعات العددية الآتية :

أ) الكلية ب) الصحيحة ج) غير النسبية د) الحقيقية

15) إذا كانت ن هي مجموعة الأعداد النسبية ، ح هي مجموعة الأعداد الحقيقية ، فإن

ن ∩ ح =

أ) ن ب) ح ج) $\overline{ن}$ د) ص

16) حاصل ضرب عدد نسبي بعدد غير نسبي هو عدد :

أ) نسبي ب) صحيح ج) غير نسبي د) كلي

17) تعتبر الأعداد غير النسبية مجموعة جزئية لمجموعة الأعداد

أ) الكلية ب) الصحيحة ج) النسبية د) الحقيقية

18) $8 \times {}^{-}2.5 =$

أ) 20 ب) $^{-}10$ ج) $^{-}20$ د) 16

19) $^{-}6 \div {}^{-}1.5 =$

أ) 2 ب) 4 ج) $^{-}2$ د) $^{-}4$

20) $0.03 \times 0.7 =$

أ) 21　　　　ب) 0.21　　　　ج) 0.021　　　　د) 2.1

(2) صنف الأعداد الآتية إلى أعداد نسبية أو غير نسبية مع التبرير :

أ) 3.9
ب) $\sqrt{225}$
ج) $\frac{1}{\sqrt{5}}$
د) -10
هـ) $\sqrt{0.01}$
و) $\sqrt{19}$
ز) 0.120120120.....
ح) 21.3232232223 ......
ط) 3.787887......
ي) $\sqrt{81}$
ك) $-\sqrt{4}$
ل) 1.6666 ......
م) $-\sqrt[3]{16}$

(3) جد العدد الصحيح الذي يحقق $2^{س} = \frac{1}{64}$

(4) جد العدد الصحيح الموجب س الذي يحقق $3^{س} \times 3^{3س} = 81$

(5) حوّل الكسور العادية الآتية إلى كسور عشرية :

أ) $-\frac{1}{4}$
ب) $\frac{25}{70}$
ج) $-\frac{20}{100}$
د) $\frac{41}{8}$

(6) حوّل الكسور العشرية الآتية إلى كسور عادية :

أ) 3.425

ب) 2.5

ج) 0.75

د) 18.02

(7) جد ناتج كل مما يأتي بأبسط صورة :

أ) $4.82 + 31.62$

ب) $32.007 - 200.1$

ج) 0.41×3.61

د) $0.02 \div 1.36$

هـ) 0.2×2.6

و) 1000×0.1

ز) $10000 \div 0.25$

ح) 100×0.948

ط) $100 \div 0.008$

ي) $2.3 \div 10.7663$

(8) جد ناتج ما يلي بأبسط صورة :

أ) $16^{-\frac{3}{4}}$

ب) $أ^{\frac{1}{4}}$

ج) $27^{-\frac{2}{3}}$

د) 10^{-3}

هـ) $\left(\frac{75}{106}\right)^{\text{صفر}}$

و) $\left(2^{\frac{1}{2}} \times 4^{\frac{1}{5}}\right) \div 8^{\frac{1}{5}}$

ز) $(-2^{5})^{2}$

ح) $\sqrt[4]{4}$

ي) $\left(\frac{6}{3}\right)^{3}$

ك) $2^{4} \times 2^{-3}$

ل) $\frac{2^5}{2^{-3}}$

م) $\sqrt{81}$

ن) $(4 \times 2^8)^{\frac{1}{10}}$

9) بين أن :

أ) $\sqrt{12} + \sqrt{3} = \sqrt{27}$

ج) $\sqrt{28} - \frac{10}{\sqrt{7}} = \frac{4\sqrt{7}}{7}$

ب) $\frac{\sqrt{200}}{\sqrt{2}} = 10$

د) $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}} = \sqrt{2}$

(10) جد قيمة كل مما يلي بأبسط صورة :

أ) $\sqrt{12} - \sqrt{3}$

ب) $\sqrt{75} + \sqrt{12}$

ج) $\sqrt{5} + \sqrt{3}$

د) $\sqrt{20} - \sqrt{45}$

هـ) $(\sqrt{5} - 2)^2$

(11) جد ناتج كل مما يأتي بأبسط صورة :

أ) $\sqrt{2}\,(\sqrt{2} - 1)$

ب) $(5 - \sqrt{2})\,(5 + \sqrt{2})$

ج) $\sqrt{6}\,(2\sqrt{6} - \frac{1}{\sqrt{24}})$

(12) انطق مقام كل من الأعداد الآتية :

أ) $\frac{3}{\sqrt{5} - 2}$

ب) $\frac{2}{\sqrt{3} - 1}$

ج) $\frac{2}{\sqrt{2}}$

(13) حل كلاً من المعادلات الآتية :

أ) $\sqrt{18}\,س + 5\sqrt{2} = -3\sqrt{2}$

ب) $4^{س} \times 2^{س-7} = 32^{-1}$

ج) $8^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times س$

الفصل العاشر

تطبيقات على الأعداد والعمليات عليها

تطبيقات على الأعداد والعمليات عليها

(1.10) مقدمة:

تناول الفصل السابق الأعداد الحقيقية والعمليات عليها ، وسيتناول هذا الفصل النسبة والتناسب وتطبيقاتهما ،وكذلك التقدير والتقريب العددي ، إذ يمكن القول بأن هذين الموضوعين امتداد لموضوع الأعداد الحقيقية ، فضلاً عن كونهما تطبيقاً لها.

فإذا ما أخذنا بنظر الاعتبار تطبيقات النسبة والتناسب ، عندها تبرز أهمية هذا الموضوع في الحياة اليومية ، سيما وأنه موضوع يهتم بالمقارنة بين الأشياء وبالحسابات ذات العلاقة بذلك.

و يلعب التقدير دوراً هاماً في التخطيط واتخاذ القرارات، وكثيراً ما نحتاج إلى معرفة العلاقات بين قيم مختلفة وهي العلاقات التي يعبر عنها عادة بـ " أكبر من " و "أصغر من " و" بين "، وإنه لمن المهم أن نعرف كيف نقدر بسرعة وأن يكون لدينا إحساس دقيق بالعلاقات بين مختلف المتغيرات. وقد يكون التقدير المتقن أنفع كثيراً من نتيجة مفصلة تتضمن أرقاماً عديدة .

(2.10) النسبة:

تستخدم النسبة للمقارنة بين كميتين ، وتكتب أ : ب وتقرأ أ إلى ب .

فمثلاً : إذا كان معك خمسة دنانير ومع زميلك ثلاثة دنانير فإن نسبة ما معك إلى ما مع زميلك هي 5 : 3 ، وإن نسبة ما معك إلى مجموع ما معكما هي 5: 8.

وتجدر الإشارة إلى أن النسبة أ : ب يمكن كتابتها على صورة كسر $\frac{أ}{ب}$ مع الأخذ بنظر الاعتبار فارق المعنى.

فمثلاً : $\frac{1}{2}$ يعني نصف شيء قسم إلى جزئين متطابقين ، أو نصف مجموعة من لأشياء، بينما $1 : 2$ تعني حصة واحدة لشخص ما مقابل حصتين لشخص آخر ، وفي الحقيقة فإن حصة الشخص الأول تشكل $\frac{1}{3}$ مجموع الحصتين وليس $\frac{1}{2}$ مجموع الحصتين،

فإذا توفّى الله شخصاً ما وكان له بنتاً وولداً فقط ، والمبلغ الذي ورّثه لهما 3000 دينار ، فإن نصيب البنت 1000 دينار ونصيب الولد 2000 دينار ، لأن حصة البنت إلى حصة الولد هي كالنسبة $1 : 2$ ، وهكذا نجد ان نصيب البنت $\frac{1}{3}$ المبلغ المورّث ، وليس نصفه.

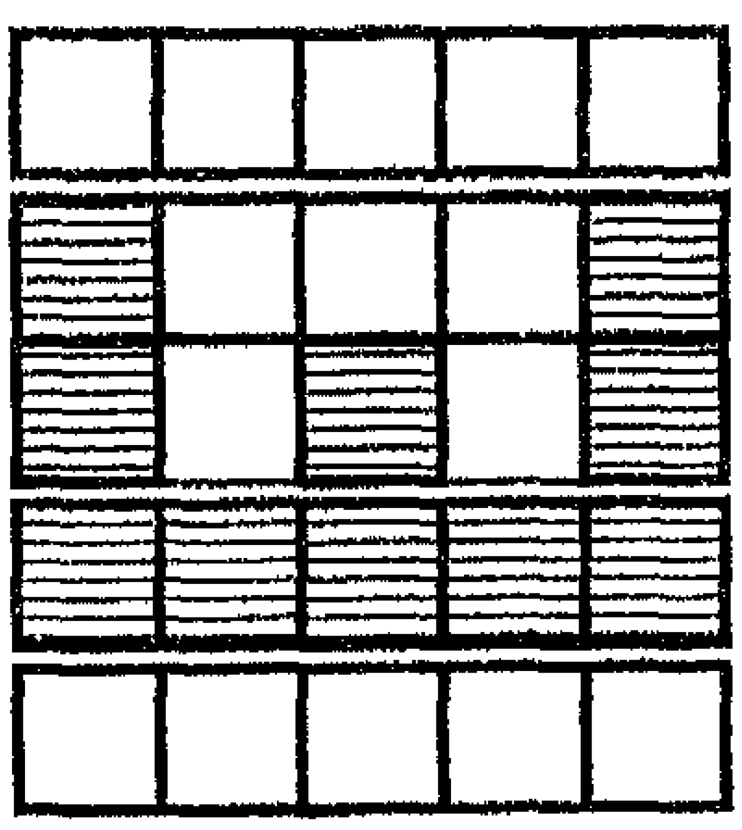
وحيث أنه يمكن كتابة النسبة على صورة الكسر $\frac{أ}{ب}$ ، فإن قيمة النسبة لا تتغير إذا ضربنا كلاً من حدّيها (أ : مقدم النسبة ، ب : تالي النسبة) بعدد غير الصفر.

كما لا تتغير قيمة النسبة إذا قسمنا كلاً من حديها على عدد غير الصفر.

مثال (1):

أوجد نسبة عدد الأجزاء المظللة إلى عدد الأجزاء غير المظللة في الشكل الآتي :

الحل:



$$\frac{\text{عدد الأجزاء المظللة}}{\text{عدد الأجزاء غير المظللة}} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

أي $2 : 3$

وعند إيجاد النسبة بين كميتين من نوع واحد نستخدم وحدات قياس من النوع نفسه، مع أن وحدة القياس لا تظهر في الجواب النهائي.

مثال (2):

قطعتان من الخشب، الأولى مربعة الشكل طول ضلعها 1.5 م ، والثانية مستطيلة الشكل طولها 2.5 م وعرضها 1 م ، أوجد نسبة مساحة القطعة المربعة إلى مساحة القطعة المستطيلة.

الحل:

مساحة القطعة المربعة = $1.5 \times 1.5 = 2.25$ م^2

مساحة القطعة المستطيلة = $2.5 \times 1 = 2.5$ م^2

إذن :

$$\frac{\text{مساحة القطعة المربعة}}{\text{مساحة القطعة المستطيلة}} = \frac{2.25}{2.5} = \frac{225}{250} = \frac{9}{10}$$

أما إذا كانت النسبة بين كميتين من نوعين مختلفين فإن وحدة النسبة في هذه الحالة هي وحدة قياس الكمية الأولى / وحدة قياس الكمية الثانية.

مثال(3):

إذا كانت المسافة بين مدينتين 400 كم ، وكان الزمن اللازم لقطع هذه المسافة خمس ساعات فما النسبة بين المسافة والزمن؟

الحل:

إن نسبة المسافة إلى الزمن هي $\frac{\text{المسافة}}{\text{الزمن}}$ = السرعة

وعليه فإن السرعة = $\frac{400}{5} = 80$ كم / ساعة.

(3.10) التناسب وأنواعه:

يعرّف التناسب على أنه تساوي نسبتين ، فإذا كانت أ : ب نسبة ، جـ : د نسبة فإن التناسب بينهما هو أ : ب = جـ : د ، والذي يمكن كتابته على الصورة :

$$\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د} \quad : ب ، د \neq 0$$

ويسمى أ ، د بطرفي التناسب، جـ، ب بوسطي التناسب ، وعليه بمكن كتابة التناسب كالآتي:

أ : ب = جـ : د، ونستطيع أن نجد نسب متساوية بالطريقة التي نجد فيها كسوراً متكافئة.

وعليه فإن : $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ تناسباً ، $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ تناسباً .

أما خاصية التناسب فهي:

إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ تناسباً فإن : أ × د = ب × جـ ، حيث ب ، د $\neq 0$

أي أن حاصل ضرب طرفيه = حاصل ضرب وسطيه.

كما أن المقادير أ ، ب ، جـ ، د وفق ترتيبها المبين متناسبة.

مثال (1):

تحقق من أن الأعداد 12 ، 15 ، 4 ، 5 بترتيبها المبين تشكل تناسباً .

الحل:

$\frac{12}{15} = \frac{4}{5}$ لأن : $12 \times 5 = 15 \times 4$ ، إذن فهي تناسب .

مثال (2):

إذا كانت نسبة عمر ندى إلى عمر أمها هي 2 : 5، وكان عمر ندى 14 سنة، فما عمر أمها ؟

الحل:

نسبة عمر ندى إلى عمر أمها = 2 : 5 = $\frac{2}{5}$.

وإذا فرضنا أن عمر أمها ن سنة ، فإن التناسب بين عمريهما

هو : $\frac{2}{5} = \frac{14}{ن}$

2ن = 70

ن = 35 سنة

مثال(3):

قُسّم مبلغ 100 دينار بين أحمد وهاني بنسبة 3 : 2 ، فما نصيب كل منهما ؟

الحل:

نصيب أحمد من المبلغ كنسبة 3 : 5، إذن نصيب أحمد $\frac{3}{5} \times 100 = 60$ ديناراً،

ونصيب هاني = 100 - 60 = 40 ديناراً.

(1.3.10) التناسب الطردي:

تعريف:

إذا كان س ، ص مقدارين متغيرين ، وكان $\frac{ص}{س}$ = ك ، حيث ك مقدار ثابت ،

فإن: ص بتناسب طردياً مع س، ويكتب ص = ك س، ويسمى ك: ثابت التناسب الطردي.

مثال (1):

إذا كان ص يتناسب طردياً مع س ، وكان س = 4 عندما ص = 6 . فأوجد ص عندما س = 3.

الحل:

$$\frac{6}{4} = \frac{ص}{3}$$

4 ص = 18

ص = 4.5

مثال (2):

يوزع في احتفال مدرسي 10 قطع حلوى لكل خمسة طلبة ، فكم قطعة حلوى يلزم لِ 96 طالباً؟

الحل:

$\frac{10}{5} = \frac{س}{96}$ ، حيث س عدد قطع الحلوى المطلوبة

إذن 5 س = 960

ومنها س = 192 قطعة حلوى

(2.3.10) التناسب العكسي:

تعريف:

إذا كان س ، ص مقدارين متغيرين وكان ص = $\frac{ك}{س}$، حيث ك مقدار ثابت،

فإن ص يتناسب عكسياً مع س ، ويكتب ص × س = ك ، ويسمى ك : ثابت التناسب العكسي.

مثال (1):

إذا كان ص يتناسب عكسياً مع س ، وكان ص = 25 عندما س = 12 ، فأوجد س عندما ص = 15 .

الحل:

حيث أن ص يتناسب عكسياً مع س، فإن ص × س = ك

وعليه : 25 × 12 = ك

س × 15 = ك

إذن 25 × 12 = س × 15

س = 20

مثال (2):

مزارع لديه من العلف ما يكفي إطعام (10) خراف مدة (5) أسابيع ، فإذا باع منها (6) خراف مباشرة بعد شرائها، فكم أسبوعاً يكفي العلف الخراف الباقية؟

الحل:

كلما نقص عدد الخراف زادت مدة إطعامها من كمية العلف نفسها وعليه فالتناسب عكسي.

إذن 10 × 5 = 4 × س، حيث س عدد الأسابيع

ومنها س = $\frac{10 \times 5}{4}$

= 12.5 أسبوعاً.

(4.10) النسبة المئوية:

تعريف:

إذا كان أ : ب نسبة، وكان ب = 100، فإن أ: ب تسمى نسبة مئوية ، وتكتب (أ ٪).

الحل:

$$\frac{1}{4} = \frac{1 \times 25}{4 \times 5} = \frac{25}{100} = 25\%$$

مثال(1):

كم بالمئة يمثل العدد 55 من العدد 88 ؟

الحل:

$$\frac{55}{88} = \frac{5}{8} = \frac{12.5 \times 5}{12.5 \times 8} = \frac{62.5}{100} = 62.5\%$$

مثال(2):

إذا كانت النسبة المئوية لعدد الأطفال في حي ما هي 25 ٪ ، وإذا كان عدد أفراد الحي = 96 شخصاً ، فما عدد أطفال الحي؟

الحل:

عدد الأطفال = $\frac{25}{100} \times 96 = 24$ طفلاً.

(5.10) تطبيقات على النسبة والتناسب والنسبة المئوية:

توجد تطبيقات كثيرة للنسبة والتناسب والنسبة المئوية، وسنكتفي بعرض عدد محدود منها لأغراض إبراز أهمية هذه المواضيع في الحياة اليومية.

(1.5.10) توزيع الميراث:

قال تعالى: ((يوصيكم الله للذكر مثل حظ الأنثيين ، فإن كن نساءً فوق اثنتين فلهن ثلثا ما ترك وإن كانت واحدة فلها النصف ولأبويه لكل واحد منهما السدس مما ترك إن كان له ولد، فإن لم يكن له ولد وورثه أبواه فلأمه الثلث، فإن

كان له إخوة فلأمه السدس من بعد وصية يوصى بها أو دين، آباؤكم وأبناؤكم لا تدرون أيهم أقرب لكم نفعاً، فريضة من الله، إن الله كان عليماً حكيماً)) صدق الله العظيم (آية 11، سورة النساء).

مثال (1):

توفي رجل تاركاً ثروة مقدارها 6240 ديناراً، فإذا كان الورثة الشرعيين هم الأب والأم والزوجة وولدان وبنت واحدة ، فما نصيب كل منهم؟

الحل:

نصيب الأب = $\frac{1}{6} \times 6240 = 1040$ ديناراً

نصيب الأم = $\frac{1}{6} \times 6240 = 1040$ ديناراً

نصيب الزوجة = $\frac{1}{8} \times 6240 = 780$ ديناراً

نصيب الولدين = $6240 - (1040 + 1040 + 780) = 3380$ ديناراً .

وحيث أن نصيب البنت إلى نصيب الولد هي 1 : 2 ، فإن مجموع الحصص يساوي خمسة ، وإن نصيب البنت = $\frac{1}{5} \times 3380 = 676$ ديناراً .

ونصيب كل ولد = $\frac{2}{5} \times 3380 = 1352$ ديناراً .

(2.5.10) مقياس الرسم:

تعلم أن مقياس الرسم = $\frac{\text{الطول في الرسم}}{\text{الطول الحقيقي}}$

فإذا كان مقياس الرسم على خارطة = 1: 100000 ، فإن كل 1 سم على الخارطة يمثل 100000 سم ، أي يمثل 1 كم في الحقيقة.

مثال:

إذا كان البعد الحقيقي بين مدينتين = 1200 كم، والبعد بينهما على الخارطة 3 سم، فما مقياس الرسم المستخدم في هذه الخارطة؟

الحل:

مقياس الرسم = $\frac{3 \text{ سم}}{1200 \times 1000 \times 100 \text{ سم}} = \frac{1}{400 \times 100000} = \frac{1}{40000000}$

أي 1 : 40000000.

(3.5.10) التقسيم التناسبي :

تعريف:

إذا قُسّم عدد إلى قسمين نسبتهما تساوي نسبة معطاة ، فإنه يكون قد قسم تقسيماً تناسبياً.

مثال (1):

ما التقسيم التناسبي للعدد (75) إذا قسم بنسبة 2 : 3؟

الحل:

إذا كان الجزء الأول من العدد = 2، فإن الجزء الثاني منه = 3 ، وإن مجموع الجزئين اللذين قسم لهما العدد = 5

وعليه فإن الجزء الأول = $\frac{2}{5} \times 75 = 30$

والجزء الثاني = $\frac{3}{5} \times 75 = 45$

مثال (2):

قسم مبلغ 420 ديناراً بين شريكين بنسبة 1 : 2 ، فما نصيب كل منهما؟

الحل:

مجموع الحصص = $1 + 2 = 3$

وعليه ، يكون نصيب الشريك الأول = $\frac{1}{3} \times 420 = 140$ ديناراً .

ويكون نصيب الشريك الثاني = $420 - 140 = 280$ ديناراً.

(4.5.10) زكاة المال:

قال تعالى: ((خذ من أموالهم صدقة تطهرهم وتزكيهم بها، وصلّ عليهم إن صلاتك سكن لهم والله سميع عليم)) صدق الله العظيم (آية 103 ، سورة التوبة).

مثال:

شرع تاجر عمله بمحل تجاري وبرأسمال قدره 20000 دينار، وبعد عام هجري حسب أرباحه فوجدها 5000 دينار، فاحسب مقدار الزكاة الواجب عليه إخراجها.

الحل:

رأس المال + الربح = 20000 + 5000 = 25000 دينار

مقدار الزكاة = $25000 \times \frac{2.5}{100} = 625$ دينار

(5.5.10) الربح البسيط:

إن جملة المبلغ بعد مدّة ما = المبلغ + الربح ، ويحسب الربح وفق القاعدة الآتية:

الربح = المبلغ × السعر × المدّة .

مثال :

أودع رجل في بنك مبلغ 15000 دينار على حساب استثماري لأجل مدته سنة، وعندما حسب البنك أرباحه في نهاية السنة وجدها 6 ٪، فما الربح المتحقق للرجل؟

الحل:

الربح = $15000 \times \frac{6}{100} \times 1 = 900$ دينار

(6.5.10) أرباح الأسهم:

يشترك المواطن في راسمال الشركة المساهمة بموجب وثيقة رسمية تمنحها الشركة له وتسمى شهادة الأسهم، ويكون نصيبه من الربح أو الخسارة وفق القاعدة الآتية:

ربح الأسهم (أو خسارتها) = نسبة الربح (الخسارة) × القيمة الاسمية للسهم ×عدد الأسهم.

مثال:

يملك ياسين 500 سهم في إحدى الشركات المساهمة، فإذا كانت القيمة الاسمية للسهم الواحد عشرة دنانير ، وربحت الشركة في ذلك العام ربحاً نسبته 8 ٪ من القيمة الاسمية للسهم ، فما دخل ياسين من أسهمه؟

الحل:

دخل ياسين من الأسهم = ربح الأسهم = $500 \times 10 \times \frac{8}{10} = 400$ دينار .

(6.10) التقدير العددي:

لنفترض أننا نحضر مهرجاناً رياضياً وأردنا معرفة الحضور، إنه من الصعب جداً عد جميع الحاضرين، سيما وأن بعضهم يدخل والبعض الآخر يخرج ، لكن من الممكن تقدير سعة الصف الواحد بِ (50) مقعد، وإذا كان عدد الصفوف (30) صفاً ، وإشغال المقاعد يقارب 75 ٪ ، فعليه يمكن أن نقدر عدد الحاضرين كالآتي:

$$50 \times 30 \times \frac{75}{100} = 1125$$ شخصاً.

وعليه، يمكن القول بأن عدد الحاضرين يزيد عن (1000) شخص ويقل عن (1200) شخص، أي يتراوح ما بين 1000 و 1200 شخص.

والتقدير يساعدنا في الحصول على جواب تقريبي سريع، كما أنه يبين لنا معقولية الجواب الدقيق ، فيجنبنا الأخطاء الحسابية.

وينبغي أن نتذكر أن الجواب الدقيق واحد، بينما هناك عدة أجوبة تقديرية حسب التقريب الذي نختاره.

فمثلاً:

لتقدير ناتج العملية الحسابية الآتية:

$\frac{13.3 + 5.9}{6.3 - 1.5}$ قد نحصل على عدة إجابات كالآتي:

$$\Leftarrow \quad \frac{13.3 + 5.9}{6.3 - 1.5} \qquad \frac{13 + 5}{6 - 1} = \frac{18}{5} = 3.6$$

$$\frac{13.3 + 5.9}{6.3 - 1.5} = \frac{13 + 6}{6 - 1} = \frac{19}{5} = 3.8$$

$$\frac{13.3 + 5.9}{6.3 - 1.5} = \frac{13 + 6}{6 - 2} = \frac{19}{4} = 4.75$$

وهكذا حصلنا على ثلاث إجابات تقديرية هي 3.6 ، 3.8 ، 4.75 .

ويبقى علينا أن نحدد أيها أقرب إلى الجواب الدقيق ، أي أيها أكثر قبولاً ؟

تعريف:

التقدير هو إعطاء حكم أو رأي شفوي قريب من القيمة الواقعية بسرعة وكفاءة دون إجراء العمليات الحسابية.

وعليه فالإجابات السابقة إجابات تقديرية ، أما الإجابة الدقيقة فهي :

$$\frac{13.3 + 5.9}{6.3 - 1.5} = \frac{19.2}{4.8} = 4$$

وخطأ الحساب في التقدير الأول = $4 - 3.6 = 0.4$

وخطا الحساب في التقدير الثاني = $4 - 3.8 = 0.2$

أما خطأ الحساب في التقدير الثالث $4.75 - 4 = 0.75$

ويمكن ملاحظة وجود تقديرين بالنقصان ، لأن : $3.6 < 4$ ، $3.8 < 4$

وتقدير واحد بالزيادة ، لأن : $4,75 > 4$.

كما يمكنك ملاحظة أن أقرب تقدير إلى الجواب الصحيح هو التقدير الثاني، ومع ذلك لا نستطيع أن نعمم طريقة التقدير الثاني لأنها تبقى طريقة عشوائية نوعاً ما، سيما وأننا لم نخضع التقدير إلى قاعدة محددة لحسابه.

أمثلة على التقدير:

قدِّر كلاً مما يأتي : $\frac{12 \times 5}{19}$ ، $\frac{31}{36} \div 5$ ، $5.9 - 2.21$ ، 237.467×14.2 ، $\frac{7}{13} \div 9.9$

الحل:

⟸ $\frac{12 \times 5}{19} \approx \frac{12 \times 5}{20} = 3$ (تم تحويل المقام إلى عدد يسهل اختصاره)

⟸ $\frac{31}{36} \div 5 \approx 5 \div 1 = 5$ (إن 31 قريبة نوعاً ما من 36)

⟸ $5.9 - 2.21 \approx 6 - 2 = 4$ (5.9 قريبة من 6 ، 2.2 قريبة من 2)

⟸ $237.467 \times 14.2 \approx 14 \times 240 = 3360$ (لماذا ؟)

⟸ $9.9 \div \frac{7}{13} \approx 10 \div \frac{1}{2} = 10 \times 2 = 20$ (كيف ؟)

(7.10) خطأ التقدير:

أشرنا في الشرح السابق إلى خطأ الحساب ، أي الفرق الموجب بين الجواب الصحيح والجواب التقديري، وهذا ما يطلق عليه بخطأ التقدير.

لكن عادة ما يستخدم الخطأ النسبي للتقدير أكثر من خطأ التقدير،حيث

$$\text{الخطأ النسبي} = \frac{\text{الفرق الموجب بين القيمة الدقيقة والقيمة التقديرية}}{\text{القيمة الدقيقة}} \times 100\%$$

مثال:

أوجد الجواب التقديري والجواب الدقيق لِ : $\frac{6.4 - 3.1}{1.25}$

الحل:

$$\text{الجواب الدقيق} = \frac{6.4 - 3.1}{1.5} = \frac{3.3}{1.5} = 2.2$$

$$\text{جواب تقديري} = \frac{6.4 - 3.3}{1.5} = \frac{6 - 3}{1} = 3$$

$$\text{وعليه فإن الخطأ النسبي للتقدير} = \frac{3 - 2.2}{2} \times 100\% = 100\% \times ... = 40\%$$

ويستدعي ذلك البحث عن جواب تقديري أفضل لهذا المثال أولغيره ، لهذا تم اعتماد التقريب في تقدير إجابات العمليات الحسابية.

(8.10) التقريب العددي:

يعتبر التقدير بمثابة حس عام مبني على الخبرة والممارسة، أما التقريب فيخضع لقواعد محددة، في حين أن الجواب الدقيق هو نتاج خوارزمية حسابية، والقواعد المحددة المستخدمة للتقريب تعتمد مبدأ التدوير، فما نقص عن نصف الرقم في منزلة ما اعتبر صفراً، وما ساوى الرقم في منزلة ما أو زاد عنه أُعتبر واحداً، وعليه:

قاعدة:

عند تدوير عدد إلى منزلة ما فإنه يتبع الآتي :

1) ضع خطاً تحت الرقم الذي سيتم التدوير إلى منزلته.

2) ضع دائرة حول الرقم الذي يليه من اليمين.

3) إذا كان الرقم المحاط بدائرة أصغر من (5) فضع هذا الرقم وما يليه من أرقام من جهة اليمين أصفاراً.

4) إذا كان الرقم المحاط بدائرة أكبر من أو يساوي (5) ، أضف واحداً إلى الرقم الذي تحته خط ، ثم ضع مكان الرقم المحاط وما يليه من اليمين أصفاراً.

ويستخدم الرمز $\approx$ للدلالة على المساواة التقريبية.

مثال:

قرّب باستخدام التدوير الأعداد التالية:

أ) $6\underline{4}2$ ، $8\underline{6}5$ ، $4\underline{8}6$ (لأقرب عشرة)

ب) 857 ، 620 ، 917 (لأقرب مئة)

الحل:

أ) $642 \approx 640$ ، $865 \approx 870$، $486 \approx 490$

$857 \approx 900$ ، $620 \approx 600$ ، $917 \approx 900$

ويعتمد المبدأ نفسه في تقريب الكسور العشرية مع إهمال الأصفار المدوّرة.

مثال:

قرّب باستخدم التدوير للأعداد التالية :

أ) 1.2 ، 6.5 ، 9.4 (لأقرب واحد صحيح)

ب) 0.15 ، 1.71 ، 10.083 (لأقرب عُشر)

ج) 0.2465 ، 0.871 ، 5.555 (لأقرب جزء من مئة)

الحل :

أ) $1.2 \approx 1$ ، $6.5 \approx 7$ ، $9.4 \approx 9$ (لأقرب واحد صحيح)

ب) $0.15 \approx 0.2$ ، $1.71 \approx 1.7$ ، $10.083 \approx 10.9$ (لأقرب عُشر)

ج) $0.2465 \approx 0.25$ ، $0.871 \approx 0.87$ ، $5.555 \approx 5.56$

(لأقرب جزء من مئة)

وفي الأعداد النسبية التي يمكن تمثيلها بكسر عشري منتهي أو دوري والأعداد غير النسبية التي تمثل بكسور عشرية غير منتهية وغير دورية فتستخدم القاعدة نفسها في ذلك كالآتي:

مثال :

قرّب كلاً مما يلي لأقرب عُشر :

$$0.672 \quad ، \quad \frac{3}{8} \quad ، \quad \frac{2}{7} \quad ، \quad \sqrt{3}$$

الحل:

$0.672 \approx 0.7$ لأن $7 > 5$

$\frac{3}{8} = 0.375$ (بإجراء القسمة الطويلة) ≈ 0.47 (كيف ؟)

$\frac{2}{7} = \overline{0.285714}$ (بإجراء القسمة الطويلة) ≈ 0.3 (لماذا ؟)

$\sqrt{3} \approx 1.732$ (باستخدام الطريقة العامة لإيجاد الجذر التربيعي أو باستخدام الآلة الحاسبة) ≈ 1.7 لأن $3 < 5$

(1.8.10) تقريب الأعداد في العمليات الحسابية:

قد تكون العملية الحسابية على أعداد كلية أو على كسور عادية أو عشرية أو على أعداد مشتركة من بين ما ذكر، والعملية الحسابية أيضاً قد تكون جمعاً أو طرحاً أو ضرباً أو قسمة أو مشتركة، أي عدة عمليات حسابية مختلفة لإيجاد ناتج ما . وبموجب ذلك كله سيتم العرض من خلال الأمثلة مكتفين بمثال واحد على كل نوع من الأعداد ولكل نوع من العمليات فرادى أو مجتمعة.

❖تقريب الأعداد الكلية في العمليات الحسابية:

مثال :

استخدم التدوير في إيجاد ناتج تقريبي لكل مما يلي:

أ) $598 + 9507$

ب) $3746 - 451$

ج) 5937×64

د) $3928 \div 48$

الحل:

أ) $598 \longrightarrow 600$ (لأقرب مئة)

$+ 9507 \longrightarrow + 9500$ (لأقرب مئة)

10100

ب) $3746 \longrightarrow 3750$ (لأقرب عشرة)

$- 451 \longrightarrow 450$ (لأقرب عشرة)

3300

ج) $5937 \longrightarrow 6000$ (لأقرب ألف)

$\times 64 \longrightarrow \times 60$ (لأقرب عشرة)

360000

د) $3928 \div 48 \longrightarrow 4000 \div 50 = 80$ (كيف ؟)

◆تقريب الكسور العشرية في العمليات الحسابية:

مثال: استخدم التدوير في إيجاد ناتج تقريبي لكل مما يلي:

أ) $0.4008 + 2.641$

ب) $1.73 - 5.2$

ج) 0.15×0.9

د) $14.5 \div 423.4$

الحل:

أ) 2.641 ⟵ 2.6 (لأقرب جزء من عشرة)

+ 0.4008 ⟵ 0.4 + (لأقرب جزء من عشرة)

3.0 = 3 (لأقرب واحد صحيح)

ب) 5.2 ⟵ 5 (لأقرب واحد صحيح)

- 1.73 ⟵ 2 - (لأقرب واحد صحيح)

3

ج) 0.9 ⟵ 1 (لأقرب واحد صحيح)

× 0.15 ⟵ 0.2 × (لأقرب جزء من عشرة)

0.2

د) $14.5 \div 423.4$ ⟵ $400 \div 10 = 40$ (كيف ؟)

◆ تقريب الكسور العادية في العمليات الحسابية:

ليس من الضروري تحويل الكسر العادي إلى كسر عشري ومناقشته على أساس نقصان رقم ما عن 5 أو زيادته عن ذلك أو مساواته للخمسة واستخدام قاعدة التدوير لذلك، إنما تتم مقارنة الكسر العادي الفعلي بالكسر $\frac{1}{2}$ فإن كان $< \frac{1}{2}$ أهمل ،وإن ساوى النصف أو زاد عنه أضيف واحداً للعدد الصحيح في منزلة الآحاد.

مثال:

أوجد جواباً تقريبياً لكل مما يأتي:

أ) $3\frac{1}{4} + 20\frac{5}{8}$

ب) $9\frac{4}{7} - 2\frac{1}{2}$

ج) $3\frac{1}{6} \times \frac{9}{4}$

د) $1\frac{5}{8} \div \frac{3}{4}$

الحل:

أ) $3\frac{1}{4} + 20\frac{5}{8} \approx 3 + 21 = 24$ (لأن $\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$ ، $\frac{5}{8} > \frac{1}{2}$)

ب) $9\frac{4}{7} - 2\frac{1}{2} \approx 10 - 3 = 7$ (لأن $\frac{4}{7} > \frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$)

ج) $3\frac{1}{6} \times \frac{9}{4} \approx 3 \times 2\frac{1}{4} \approx 3 \times 2 = 6$ (كيف ؟)

د) $1\frac{5}{8} \div \frac{3}{4} \approx 2 \div 1 = 2$ (لماذا ؟)

◆ **تقريب أعداد متنوعة في العمليات الحسابية:**

مثال:

أوجد جواباً تقريبياً لما يلي:

$$401 \times \frac{6.002 \div 8\frac{6}{7}}{8\frac{1}{5} + 11.9}$$

الحل:

$$400 \times \frac{6 - 9}{8 + 12} \approx 401 \times \frac{6.002 \div 8\frac{6}{7}}{8\frac{1}{5} + 11.9}$$

$$60 = 400 \times \frac{3}{20} =$$

(2.8.10) أساليب أخرى في التقريب:

تم في عمليات التقريب السابقة استخدام التدوير وفق القاعدة المعطاة، وسيتم في الأمثلة الآتية استخدام أساليب غير طريقة التدوير، ويتضح ذلك مما يلي:

التقريب وفق العدد الذي يشكل ظاهرة تجمع (Clustering):

لإجراء عملية حسابية يُنظر إلى الأعداد الموجودة ، فإن وجدت بأنها تتمحور حول عدد ما، أُعتبر هذا العدد تقريباً لكل منها ، والأمثلة توضح ذلك.

مثال:

قرّب كلاً مما يأتي مستخدماً العدد الذي يشكل ظاهرة تجمع:

أ) $84 + 78 + 82$

ب) $398 + 406 + 387 - 412$

ج) $28.98 + 32.09 + 35.12$

الحل :

أ) يمكنك ملاحظة أن $84 + 78 + 82$ تتجمع حول العدد (80) ،
وعليه فإنها تقرب إلى $3 \times 80 = 240$

ب) ويمكنك ملاحظة أن $398 + 406 + 387 - 412$ تتجمع حول العدد 400 وعليه، فإنها تقرب إلى $(3 \times 400) - 400 = 800$

ج) والأعداد $28.98 + 32.09 + 35.12$ تتمحور حول العدد 30
وعليه ، فإنها تقرب إلى $3 \times 30 = 90$.

التقريب وفق الأعداد المتآلفة (Compatible Numbers):

عند إجراء عملية حسابية ينظر إلى الأعداد الموجودة، فإن وجد بأن بعضها يكمل البعض الآخر أو يشترك معه في صفة ما، عندها تقرب هذه الأعداد بعدد ما ثم تستكمل الإجراءات الحسابية الأخرى، والمثال الآتي يوضح ذلك.

مثال:

قرّب كلاً مما يأتي مستخدماً الأعداد المتآلفة:

أ) $786 + 144 + 389$

ب) $4.09 + 5.01 + 19.87$

ج) 2185×64

د) 49.29×33.1

ه) $98 \div 9$

و) $41.33 \div 5$

ز) $174 \times \frac{1}{6}$

الحل:

أ) يمكنك ملاحظة أن $786 + 144 + 389 \approx 800 + 144 + 400$

$\approx 1200 + 140 = 1340$ تقريباً

ب) كذلك $4.09 + 5.01 + 19.87 \approx 5 + 5 + 20 = 30$ تقريباً

ج) أما $2185 \times 64 \approx 2000 \times 60 = 12000$ تقريباً

د) كذلك $49.29 \times 33.1 \approx 50 \times 30 = 1500$ تقريباً

هـ) ولإيجاد $98 \div 9 \approx 99 \div 9 = 11$ تقريباً

أو $100 \div 10 = 10$ تقريباً

و) ولحساب $41,33 \div 5 \approx 40 \div 5 = 8$ تقريباً

ز) أما $174 \times \frac{1}{6}$ فإن العدد الذي يأتلف مع العدد 6 هو 180

وعليه فإن $174 \times \frac{1}{6} \approx \frac{1}{6} \times 180 = 30$ تقريباً

(9.10) خطأ التقريب:

إن استخدم التدوير والعدد الذي يشكل ظاهرة تجمع والأعداد المتآلفة في الحصول على جواب تقريبي للجواب الدقيق لا تخلو من الخطأ، ويكون هذا الخطأ هو الفرق الموجب بين الجواب الدقيق والجواب التقريبي، وحيث أن الخطأ النسبي أكثر استخداماً، فإن حساب هذا الخطأ يتم وفق القاعدة الآتية:

$$\text{الخطأ النسبي للتقريب} = \frac{\text{الفرق الموجب بين القيمة الدقيقة والقيمة التقريبية}}{\text{القيمة الدقيقة}} \times 100\%$$

مثال:

احسب الخطأ النسبي للتقريب في المثال الآتي:

$$19.87 + 5.01 + 4.09$$

الحل:

- باستخدام التدوير لأقرب واحد صحيح فإن:

$$19.87 + 5{,}01 + 4.09 \approx 20 + 5 + 4 = 29$$

- وباستخدام العدد الذي يشكل ظاهرة تجمع فإن:

$$29 = (5 \times 4) + 5 + 5 \approx 19.87 + 5.01 + 4.09$$

= 30 تقريباً

- وعند استخدام الأعداد المتآلفة فإن:

$$19.87 + 5.01 + 4.09 = 5 + 5 + 20 = 30$$ تقريباً

- أما الجواب الدقيق فهو $19.87 + 5.01 + 4.09 = 28.97$

وعليه يكون الخطأ النسبي في حالة التدوير = $\frac{0.03}{28.97} \times 100\%$

$\approx 0.1\%$

ويكون هذا الخطأ في الحالتين التاليتين = $\frac{1.03}{28.97} \times 100\% \approx 3.5\%$

(10.10) تمارين ونشاطات:

(1) ضع إشارة (×) على رمز الإجابة الصحيحة لكل مما يلي:

1) 0.6 تساوي

أ) 6 ٪ ب) 60 ٪ جـ) 0.6 ٪ د) 0.06 ٪

2) 1.5 تساوي

أ) 1.5 ٪ ب) 15 ٪ جـ) 150 ٪ د) 1.05 ٪

3) 75 ٪ تساوي

أ) 7.5 ب) 0.75 جـ) 0.075 د) 75

4) 0.001 ٪ تساوي

أ) 0.001 ب) 0.1 جـ) 0.00001 د) 0.01

5) 2.5 ٪ تساوي

أ) $\frac{1}{4}$ ب) $\frac{1}{40}$ جـ) $\frac{25}{10}$ د) $\frac{25}{100}$

6) تشارك أحمد وحامد في تجارة بنسبة 1 : 2 على الترتيب في رأس المال فإذا كانت مشاركة حامد (400) دينار فإن مشاركة أحمد تساوي

أ) 4000 دينار
ب) 2000 دينار
جـ) 8000 دينار
د) 1000 دينار

7) يصنع نجار (3) كراسي في أسبوع، كم كرسياً يصنع في (4) أسابيع ؟

أ) 15 ب) 12 جـ) 14 د) 18

8) يحتاج 7عمال إلى (12) يوماً لحفر بئر ماء، فإذا انسحب (3) قبل عملية الحفر، فكم يوماً يحتاج بقية العمال لإتمام حفر البئر؟

أ) 2 ب) 12 جـ) 14 د) 18

9) 3 ، 8 ، س ، 24 تشكل تناسباً عندما س =

أ) 9 ب) 1 جـ) 64 د) 2

10) 2 ، 7، س ، 3.5 تشكل تناسباً عندما س =

أ) 1 ب) 4 جـ) 3.5 د) $\frac{2}{7}$

11) إذا كانت نسبة ما مع خالد من النقود إلى ما مع علي هي 3 : 2 وكان مع خالد 60 ديناراً فكم ديناراً مع علي ؟

أ) 12 ب) 40 جـ) 90 د) 60

12) $\frac{1}{2}$ 1 : 2 كنسبة مئوية تساوي

أ) 75٪ ب) 25٪ جـ) 50٪ د) 125٪

13) 0.6 تساوي

أ) $\frac{2}{5}$ ب) 60٪ جـ) 40٪ د) 6٪

14) 2.5 ٪ تساوي

أ) $\frac{1}{4}$ ب) $\frac{1}{40}$ جـ) $\frac{25}{10}$ د) $\frac{25}{100}$

15) تشارك أحمد وحامد في تجارة بنسبة 1 : 2 على الترتيب في رأس المال فإذا كانت مشاركة حامد (400) دينار فإن مشاركة أحمد تساوي

أ) 4000 دينار

ب) 2000 دينار

جـ) 8000 دينار

د) 1000 دينار

16) 0.07 لأقرب عشر تساوي

أ) 0.1 ب) 0.7 جـ) 0.1 د) 0.2

17) 34.2 لأقرب واحد صحيح تساوي

أ) 34 ب) 34.0 جـ) 35 د) 34.2

18) 9566 لأقرب عشرة تساوي

أ) 9566 ب) 9500 جـ) 9560 د) 10000

19) 708 لأقرب مئة تساوي

أ) 700 ب) 710 جـ) 708 د) لاشيء مما ذكر

20) 49 لأقرب مئة تساوي

أ) 49 ب) 50 جـ) 100 د) صفر

21) 6531 لأقرب ألف تساوي

أ) 6500 ب) 6530 جـ) 7000 د) 6000

22) 421 لأقرب مئة تساوي

أ) 420 ب) 500 جـ) 400 د) لا شيء مما ذكر

23) 1.05 لأقرب واحد صحيح تساوي

أ) 1.1 ب) 1 جـ) 2 د) صفر

24) 267 لأقرب عشرة تساوي

أ) 267 ب) 270 جـ) 260 د) 300

25) 377 لأقرب عشرة تساوي

أ) 377 ب) 370 جـ) 380 د) 400

(2) اختصر كلاً من النسب الآتية إلى أبسط صورة :

16 : 48 ، 1.25 : 2.5 ، $\frac{1}{5}$ 3 : $\frac{8}{3}$

(3) إذا كان الراتب الشهري لموظف 300 دينار، يدفع منه 600 دينار أجرة سكن سنوية ويوفر 25 ديناراً شهرياً، فما نسبة أجرة السكن الشهرية إلى راتبه ؟ وما نسبة توفيره إلى راتبه ؟

(4) تسير سيارة بسرعة 80 كم / ساعة، وقطعت مسافة 400 كم، فما الزمن الذي استغرقته في قطع هذه المسافة ؟

(5) حدد التناسب من النسب الآتية:

أ) 3 : 4 ، 5 : 7 ب) $\frac{1}{4}$ ، $\frac{5}{20}$ جـ) $\frac{6}{9}$ ، $\frac{8}{12}$

(6) أي الأعداد وفق الترتيب المبين تشكل تناسباً ؟

أ) 3 ، 7 ، 18 ، 42 ب) 9 ، 27 ، 1 ، 3 جـ) 16 ، 4 ، 64 ، 8

(7) إذا كان ارتفاع بناء 20 متراً وطول ظله تسعة أمتار فما طول ظل بناء آخر ارتفاعه 15 متراً في الوقت نفسه ؟

(8) كم عدد الأيام اللازمة لعشرين عاملاً كي ينجزوا العمل نفسه الذي ينجزه 25 عاملاً في 32 يوماً ؟

(9) أخذت صورة بمقياس رسم قدره 1 : 50 لطالب طوله الحقيقي 175 سم، فما طول الطالب في الصورة ؟

(10) مدرسة عدد طلابها 420 طالباً ن فإذا كانت النسبة المئوية لغياب الطلبة في يوم ما 5٪ فما عدد الطلبة الغائبين في ذلك اليوم ؟

11) أودع حامد مبلغ 1000 دينار في أحد البنوك على أساس حساب استثماري لأجل مدته سنة واحدة ، وعند احتساب نسبة الربح في نهاية العام وجد بأنها 4٪ ، فما مقدار دخل حامد من المبلغ الذي أودعه ؟

(12) اشترى عادل 800 سهم من شركة مساهمة بمبلغ 2000 دينار وكانت القيمة الاسمية للسهم الواحد ديناران ، فإذا وزعت الشركة في نهاية العام ربحاً نسبته 15 ٪ ، فما دخل عادل من هذه الأسهم ؟

(13) يوزع موظف راتبه الشهري بين أجرة السكن وثمن الطعام وثمن الملابس بنسبة 4 : 3 : 1 فإذا كان راتبه 320 ديناراً ، فكيف يوزع هذا الراتب على أوجه صرفه ؟

(14) ادخر سمير مبلغ 6000 دينار ومضى على ادخاره لهذا المبلغ عام هجري كامل ، فما الزكاة المستحقة على هذا المبلغ ؟

(15) بلغت تركة متوفى 8400 دينار وكان ورثته الشرعيون ولدين وثلاث بنات ، فما نصيب كل منهم ؟

(16) قم بزيارة إلى مكتبة كليتك ، وابحث في المراجع المتوافرة عن تطبيقات النسبة والتناسب والنسبة المئوية ، بحيث يكون أحد التطبيقات مما درسته وتطبيق آخر لم تدرسه ، ثم اكتب عن هذين التطبيقين تقريراً مناسباً .

(17) أوجد تقديراً مناسباً لكل مما يأتي واحسب الخطأ النسبي للتقدير :

$31 + 58$ ، $397 - 746$ ، $16.34 - 48.65$ ، 9×3.2

$9.2 \div 71.9$ ، $4.99 \times 9\frac{7}{8}$

(18) قرّب كلاً مما يأتي مستخدماً التدوير للمنزلة العشرية المطلوبة ، واحسب الخطأ النسبي للتقريب :

3542 لأقرب عشرة ، 8411 لأقرب مئة ، 9.94 لأقرب ألف ، 0.76 لأقرب عُشر ، 80.081 لأقرب جزء من مئة، 176.5 لأقرب واحد صحيح، 914.5555 لأقرب جزء من ألف.

(4) قرّب ناتج ما يأتي مستخدماً العدد الذي يشكل ظاهرة تجمع واحسب الخطأ النسبي للتقريب:

$$\frac{6.4 \times (5.8 - 5.9 + 6.2)}{5.74}$$

(5) قرّب ناتج ما يأتي مستخدماً الأعداد المتآلفة واحسب الخطأ النسبي للتقريب :

$5.2 + 19.9 + 4.8$ ، $25 \div 226$ ، $\frac{1}{7} \times 13.9$

(6) استخدم التدوير في إيجاد ناتج كل مما يأتي واحسب الخطأ النسبي للتقريب :

$36.8 + 49.5 + 48.3$ ، 7.49×4.81 ، $2.005 - 3.16$،

$99.1 \div 941.45$ ، $20\frac{5}{7} + 6\frac{1}{3}$ ، $2\frac{5}{9} \times 14\frac{1}{10}$

(7) استخدم الآلة الحاسبة أو الطريقة العامة لإيجاد الجذر التربيعي في تقريب $\sqrt{5}$ لأقرب جزء من مئة.

(8) حول كلاً مما يأتي إلى كسر عشري وقرّب الجواب إلى ثلاث منازل عشرية :

$\frac{1}{6}$ ، $\frac{2}{7}$ ، $\frac{1}{125}$

(9) حصل ثلاثة طلاب على جائزة قيمتها 118.75 ديناراً ، فكم تكون حصة كل منهم لأقرب فلس ، إذا تم توزيعها بالتساوي؟

(10) ترتفع قمة إفرست 29028 قدماً ، أوجد قيمة تقريبية لارتفاعها بالأميال ، إذا علمت أن الميل = 5280 قدماً.

(11) ثوب من القماش طوله 217 متراً ، قص إلى عشر قطع بالتساوي فما طول كل قطعة لأقرب متر؟

المراجع:

أ. المراجع باللغة العربية:

1. عابد، عدنان وزملاؤه (1993)، الرياضيات وطرائق تدريسها (1)، جامعة القدس المفتوحة، عمان .
2. عبيد، وليم (2004)، تعليم الرياضيات لجميع الأطفال. دار المسيرة للنشر والتوزيع،عمان، الاردن.
3. عفانه، عزو (2001)، التدريس الاستراتيجي للرياضيات الحديثة. دار حنين ، عمان.
4. وزارة التربية والتعليم (1990)، كتب ومناهج الرياضيات المقررة في صفوف المرحلة الأساسية، مديرية المناهج والكتب المدرسية، عمان.

ب. المراجع باللغة الإنجليزية:

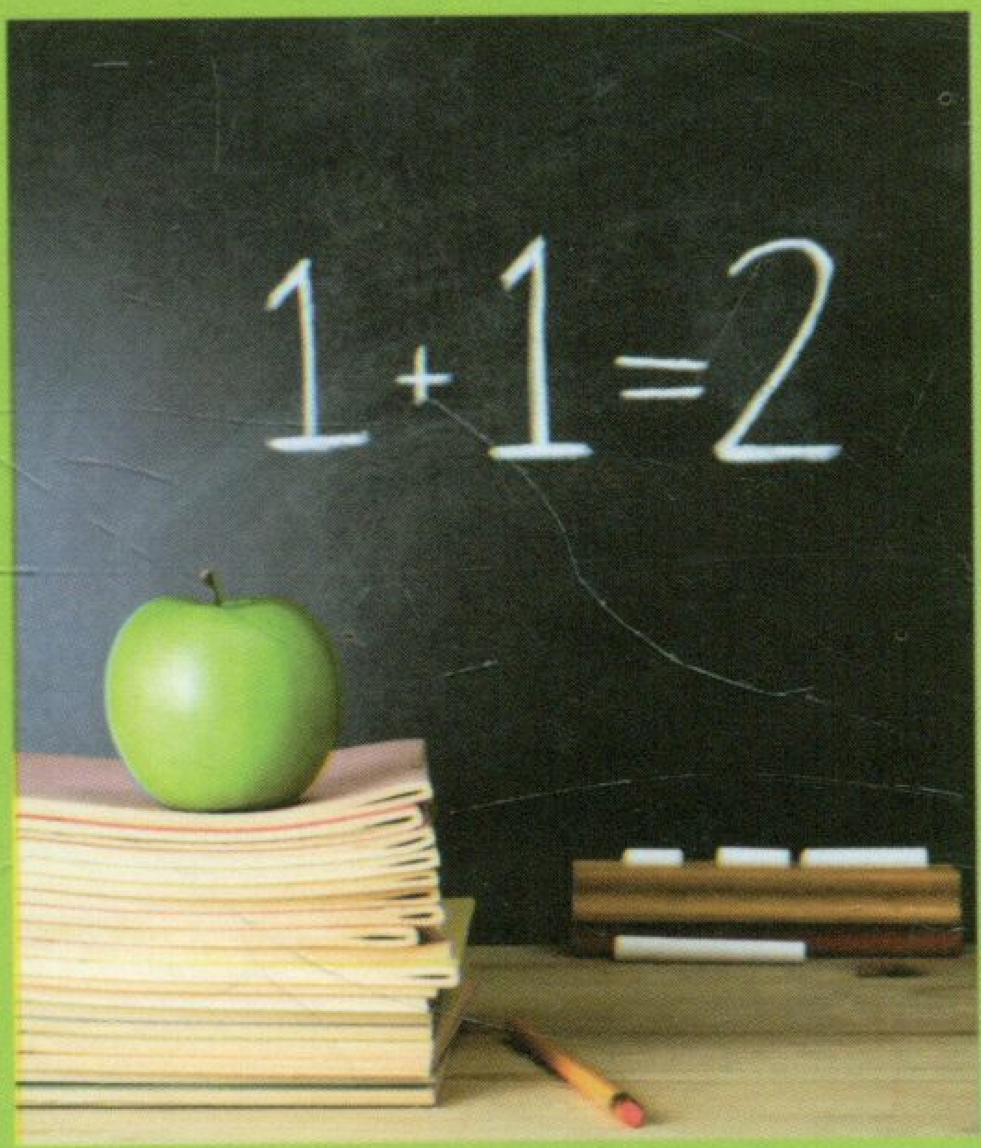
1. Banks, J. (1969) . Elements of Mathematics . Boston : Allyn and Bacon Inc .
2. Newmark, J. , and Lak, F. (1988) . Mathematics as a Second Languge . California : Addison – Wesely publishing company .
3. Sidhu, K.(1985) . The Teatching of Mathimatics . New Delhi : Sterling Publishers .
4. Smith, J. , and Booth, P. (1989). Consumer Mathematics . New York : Addison – Wesely publishing company .

للنشر والتوزيع

للنشر والتوزيع

الرياضيات
الأساسية

لطلبة الجامعات ومعلمي الصفوف الابتدائية



9789957833800

مكتبة المجتمع العربي للنشر والتوزيع
الأردن - عمان - وسط البلد - ش. السلط - مجمع الفحيص التجاري
تلفاكس: 96264632739+ - خلوي: 962795651920+
ص.ب. 8244 عمان 11121 الأردن
الأردن - عمان - الجامعة الأردنية - شارع الملكة رانيا العبد الله
مقابل كلية الزراعة - مجمع سمارة التجاري
Email: Moj_pub@yahoo.com - info@muj-arabi-pub.com
www.muj-arabi-pub.com

دار الإعصار العلمي للنشر والتوزيع
الأردن - عمان - مرج الحمام - شارع الكنيسة - مقابل كلية القدس
هاتف : 96265713906+ فاكس : 96265713907+
جوال : 00962-797950880
الأردن - عمان - الجامعة الأردنية - شارع الملكة رانيا العبد الله
مقابل كلية الزراعة - مجمع سمارة التجاري
هاتف : 96265347917+ فاكس : 96265347918+
info@al-esar.com - www.al-esar.com